

Л. А. Латотин Б. Д. Чеботаревский

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие для 11 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

2-е издание, пересмотренное

*Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь*

Минск «Народная асвета» 2013

Правообладатель Народная асвета

УДК 51(075.3=161.1)

ББК 22.1я721

Л27

Перевод с белорусского языка *И. П. Ефременко*

Рецензент

главный научный сотрудник государственного научного учреждения
«Институт математики Национальной академии наук Беларуси»,
доктор физико-математических наук, профессор *В. И. Берник*

Латотин, Л. А.

Л27 Математика : учеб. пособие для 11-го кл. учреждений
общ. средн. образования с рус. яз. обучения / Л. А. Лато-
тин, Б. Д. Чеботаревский ; перевод с белорус. яз. И. П. Еф-
ременко. — 2-е изд., пересмотр. — Минск : Нар. света,
2013. — 462 с. : ил.

ISBN 978-985-03-1965-4.

УДК 51(075.3=161.1)

ББК 22.1я721

ISBN 978-985-03-1965-4

© Латотин Л. А., Чеботаревский Б. Д.,
2008

© Латотин Л. А., Чеботаревский Б. Д.,
2013, с изменениями

© Ефременко И. П., перевод на рус-
ский язык, 2013

© Оформление. УП «Народная асве-
та», 2013

Правообладатель Народная асвета

Дорогие друзья!

Данное учебное пособие обеспечивает изучение программного материала выпускного класса и повторение всего курса математики. Оно организовано так же, как и пособия предыдущих классов. Каждый параграф начинается с обсуждения того круга вопросов, которые обозначены в названии параграфа. Наиболее важное выделено специальными шрифтами. Новые понятия выделяются **полужирным шрифтом**. Правила и утверждения выделены **полужирным курсивом**, а понятия и факты, на которые следует обратить внимание, но необязательно запоминать, — *курсивом*. Материал, выделенный треугольниками ▲, не предназначен для обязательного контроля.

После объяснительного текста идут контрольные вопросы, помеченные знаком ?. Они предназначены для проверки того, как вы усвоили содержание объяснительного текста. Если на тот или иной вопрос вы не смогли ответить, нужно вернуться к объяснительному тексту и с его помощью попробовать ответить на этот вопрос снова.

Упражнения, идущие после контрольных вопросов, разделены на три группы.

Упражнения первой группы посвящены тем вопросам, которые обсуждались в объяснительном тексте. Они имеют в основном тренировочный характер, хотя среди них могут встретиться и более сложные.

Вторую группу после разделительной горизонтальной черты составляют разнообразные упражнения на повторение. При их выполнении вам нужно будет применять знания, приобретенные ранее, в том числе и в предыдущих классах.

Задачи третьей группы, которые идут после разделительных звездочек, являются в чем-то нестандартными. Они требуют творческого подхода, самостоятельности в рассуждениях. Вместе с тем для их решения у вас достаточно знаний.

Желаем вам успехов!

Авторы

Призма и цилиндр

1. Призма

Ранее вы уже знакомились с **призмой**, т. е. многогранником, две грани которого — равные n -угольники, а остальные n граней — параллелограммы.

Равные грани-многоугольники призмы лежат в параллельных плоскостях и называются **основаниями** призмы, а остальные грани-параллелограммы — **боковыми гранями**. Ребра боковых граней, не принадлежащие основаниям, называют **боковыми ребрами**. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называют **диагональю** призмы (рис. 1). Плоскость, проходящая через два боковых ребра призмы, не принадлежащих одной грани, называется **диагональной плоскостью**, а сечение призмы диагональной плоскостью — **диагональным сечением**. На рисунке 2 показаны два диагональных сечения призмы.

Призмы разделяют на *треугольные, четырехугольные, пятиугольные* и т. д. в зависимости от количества сторон их оснований. Призма, изображенная на рисунке 1, — шестигонная, а на рисунке 2, — девятиугольная.

Отличают *прямые* и *наклонные* призмы в зависимости от того, перпендикулярны или не перпендикулярны боковые ребра призмы ее основаниям. Обычно при изображении прямой призмы ее боковые ребра проводят вертикально.

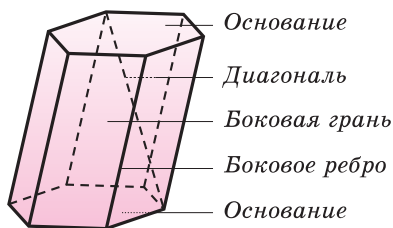


Рис. 1

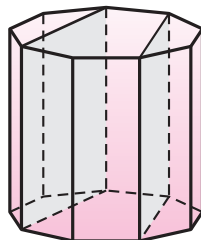


Рис. 2

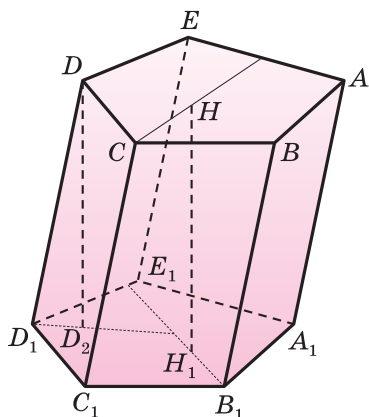


Рис. 3

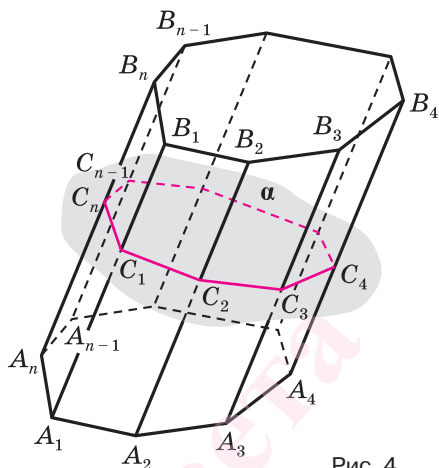


Рис. 4

Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется **правильной призмой**. В прямой призме все боковые грани — прямоугольники, а в правильной — равные прямоугольники.

Перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одного основания призмы к плоскости другого основания, называется **высотой призмы**. На рисунке 3 показаны две высоты DD_2 и HH_1 призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$. У прямой призмы ее высота равна боковому ребру.

Боковые грани составляют *боковую поверхность призмы*, а боковые грани вместе с основаниями — *полную поверхность призмы*.

Теорема 1. *Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра ее перпендикулярного сечения и длины бокового ребра:*

$$S_{\text{бок}} = P \cdot l.$$

Доказательство. Пусть имеется n -угольная призма $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_nB_1B_2B_3...B_{n-1}B_n$ (рис. 4). Пересечем ее плоскостью α , перпендикулярной боковому ребру. Получим перпендикулярное сечение $C_1C_2C_3...C_{n-1}C_n$, стороны которого перпендикулярны сторонам параллелограммов, составляющим боковую поверхность призмы. Поэтому для боковой поверхности $S_{\text{бок}}$ получим:

$$\begin{aligned} S_{\text{бок}} &= S_{A_1B_1B_2A_2} + S_{A_2B_2B_3A_3} + \dots + S_{A_{n-1}B_{n-1}B_nA_n} + S_{A_nB_nB_1A_1} = \\ &= A_1B_1 \cdot C_1C_2 + A_2B_2 \cdot C_2C_3 + \dots + A_{n-1}B_{n-1} \cdot C_{n-1}C_n + A_nB_n \cdot C_nC_1 = \\ &= (C_1C_2 + C_2C_3 + \dots + C_{n-1}C_n + C_nC_1) \cdot A_1B_1 = P \cdot l. \end{aligned} \quad (1)$$

При переходе (1) мы учли, что все боковые ребра призмы равны друг другу, при переходе (2) — то, что сумма $C_1C_2 + C_2C_3 + \dots C_{n-1}C_n + C_nC_1$ выражает периметр P перпендикулярного сечения призмы, а множитель A_1B_1 — длину l бокового ребра.

Следствие 1. *Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра ее основания и высоты.*

Действительно, перпендикулярное сечение прямой призмы равно ее основанию, а боковое ребро является высотой.

Частным видом призмы является *параллелепипед*, т. е. призма, основанием которой является параллелограмм. Параллелепипед, как и призма, может быть прямым или наклонным. Прямой параллелепипед, основаниями которого являются прямоугольники, называется *прямоугольным параллелепипедом*. Прямоугольный параллелепипед, у которого три ребра, выходящие из одной вершины, равны друг другу, называется *кубом*.

У параллелепипеда все грани — параллелограммы, из которых у прямого параллелепипеда прямоугольниками являются боковые грани, а у прямоугольного параллелепипеда — все грани.

12 ребер параллелепипеда разделяются на три четверки равных ребер (рис. 5), его 6 граней — на три пары равных граней (рис. 6), а 4 диагонали пересекаются в одной точке, явля-

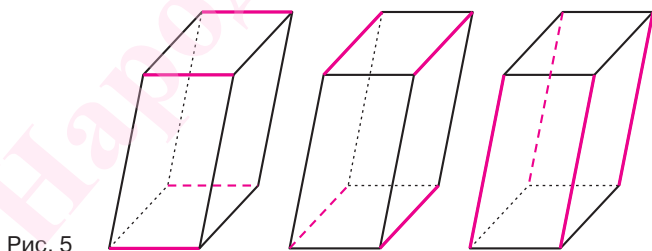


Рис. 5

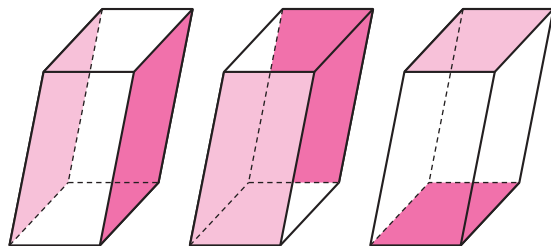


Рис. 6

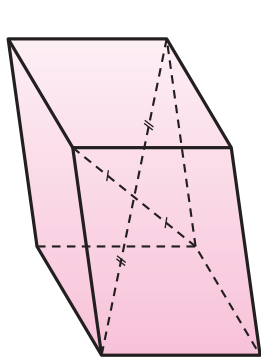


Рис. 7

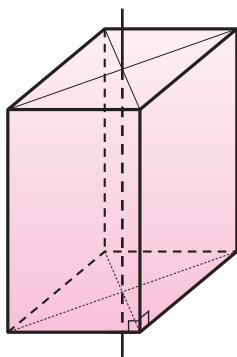


Рис. 8

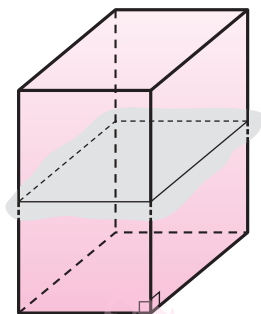


Рис. 9

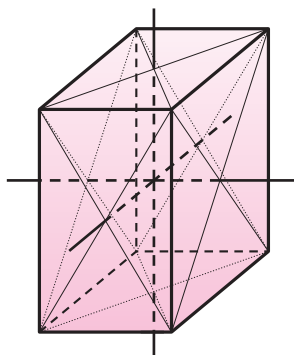


Рис. 10

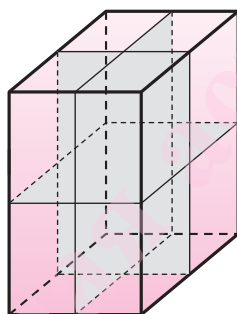


Рис. 11

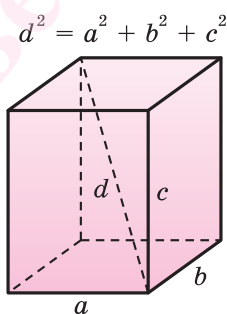


Рис. 12

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

ющейся центром симметрии параллелепипеда (рис. 7). Прямой параллелепипед еще имеет ось симметрии (рис. 8) и плоскость симметрии (рис. 9). Прямоугольный параллелепипед имеет три оси симметрии (рис. 10) и три плоскости симметрии (рис. 11).

Ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, называют *измерениями прямоугольного параллелепипеда*. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений (рис. 12), и все его диагонали равны друг другу.

Важной характеристикой плоской фигуры является ее площадь. Подобной характеристикой тела является его объем. Будем считать, что изучаемые нами тела имеют объем.

За единицу объема принимают объем куба с ребром 1. На практике пользуются разными единицами объема: как метрическими — кубический миллиметр, кубический сантиметр, кубический дециметр, кубический метр, кубический

километр, так и неметрическими — галлон, барель, бушель, кварта.

Для объема тела выполняются его *основные свойства*:

равные тела имеют равные объемы;

если тело разделено на части, то его объем равен сумме объемов этих частей.

При этом равными фигурами называют фигуры, которые преобразуются друг в друга определенным движением. Например, равными являются две шестиугольные правильные призмы, у которых соответственно равны стороны оснований и высоты (рис. 13), или два цилиндра с соответственно равными радиусами оснований и образующими (рис. 14). Тело, изображенное на рисунке 15, можно разделить на цилиндр и конус, и его объем равен сумме объемов этих цилиндра и конуса.

Два тела с равными объемами называют **равновеликими телами**. Равные тела являются равновеликими, но не наоборот.

Вы знаете, что *объем V прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений a, b, c* (рис. 16): $V = abc$.

Учитывая, что в формуле $V = abc$ произведение ab выражает площадь S основания прямоугольного параллелепипеда, а число c — его высоту h , получим, что *объем V прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания и высоты: $V = S_{\text{осн}} \cdot h$.*

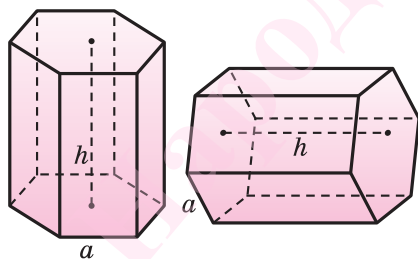


Рис. 13

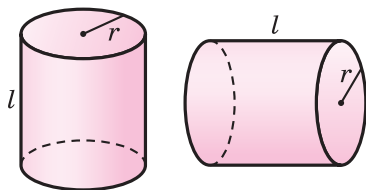


Рис. 14

$$V = abc = S_{\text{осн}} \cdot h$$

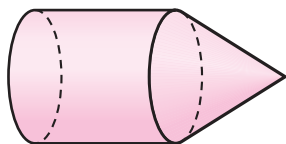


Рис. 15

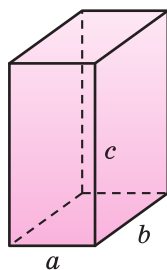


Рис. 16

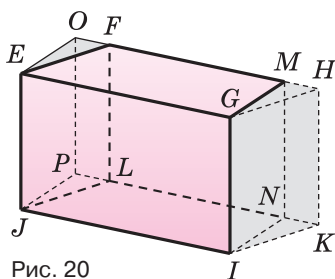
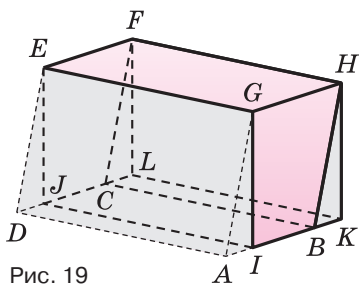
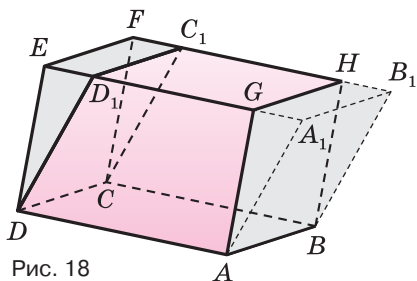
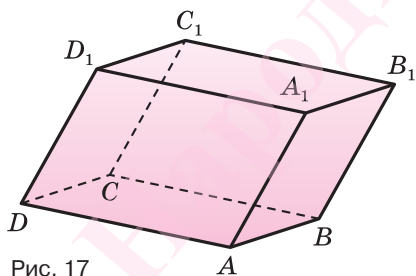
Теорема 2. Объем произвольного параллелепипеда равен произведению площади его основания и высоты:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h.$$

Доказательство. Пусть имеется произвольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 17). Через ребро AB проведем плоскость, перпендикулярную ребру AD , она отсечет от параллелепипеда треугольную призму $AA_1 GBB_1 H$ (рис. 18). После параллельного сдвига этой призмы в направлении отрезка AD получим призму $DD_1 ECC_1 F$. Параллелепипед $ABCD G H F E$ равновелик с данным параллелепипедом $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Выполненное преобразование параллелепипеда также сохраняет объем параллелепипеда, площадь его основания и высоту.

У параллелепипеда $ABCD G H F E$ его боковые грани $AGHB$ и $DEFC$ перпендикулярны плоскости основания. К граням $AGED$ и $BHFC$, которые не перпендикулярны плоскости основания, применим такое же преобразование, в результате которого получим прямой параллелепипед $IGHK J EFL$ (рис. 19), в котором сохраняются объем, площадь основания и высота.

Наконец, применив еще раз такое преобразование к граням $IGHK$ и $J EFL$ прямого параллелепипеда $IGHK J EFL$, получим прямоугольный параллелепипед $IGMN J EOP$ (рис. 20), сохранив объем параллелепипеда, площадь его основания и высоту.



Значит,

$$V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = V_{IGMNJEOP} = S_{INPJ} \cdot IG = S_{ABCD} \cdot IG.$$

Множитель S_{ABCD} есть площадь основания параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, а множитель IG выражает его высоту, так как IG есть перпендикуляр, возведенный из точки I основания $ABCD$ к другому основанию $A_1 B_1 C_1 D_1$. Значит, объем произвольного параллелепипеда равен произведению площади его основания и высоты.

Теорема 3. Объем призмы равен произведению площади ее основания и высоты:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала треугольную призму $ABCA_1 B_1 C_1$ (рис. 21). Дополним ее до параллелепипеда $ABDCA_1 B_1 D_1 C_1$ (рис. 22). Точка P пересечения диагоналей диагонального сечения $BCC_1 B_1$ этого параллелепипеда является его центром симметрии. Это означает, что достроенная призма $BCDB_1 C_1 D_1$ симметрична данной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ относительно центра P , а потому эти призмы равны друг другу. Значит, объем параллелепипеда $ABDCA_1 B_1 D_1 C_1$ равен удвоенному объему данной призмы.

Объем параллелепипеда $ABDCA_1 B_1 D_1 C_1$ равен произведению площади его основания $ABDC$ и высоты. Но площадь его основания $ABDC$ равна удвоенной площади основания ABC данной призмы, а высота параллелепипеда равна высоте при-

змы. Отсюда следует, что объем призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ равен площади ее основания ABC и высоты. Теперь рассмотрим произвольную призму $A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1} A_n B_1 B_2 B_3 \dots B_{n-1} B_n$ (рис. 23). Диагональными се-

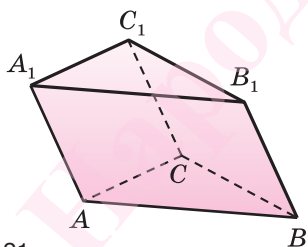


Рис. 21

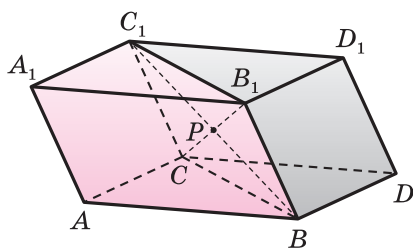


Рис. 22

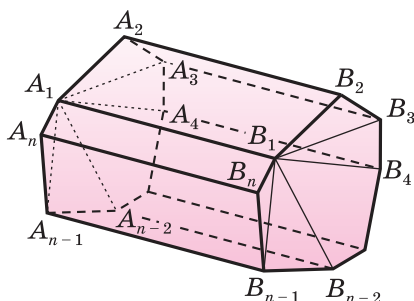


Рис. 23

чениями, проходящими через вершину A_1 , разобьем ее на треугольные призмы-части $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$, $A_1A_3A_4B_1B_3B_4$, ..., $A_1A_{n-2}A_{n-1}B_1B_{n-1}B_{n-2}$, $A_1A_{n-1}A_nB_1B_{n-1}B_n$, которые все имеют одну и ту же высоту, равную высоте h данной призмы. Объем данной призмы равен сумме объемов призм-частей. По уже доказанному для объема V данной призмы получим:

$$V = S_{A_1A_2A_3} \cdot h + S_{A_1A_3A_4} \cdot h + \dots + S_{A_1A_{n-2}A_{n-1}} \cdot h + S_{A_1A_{n-1}A_n} \cdot h = \\ = (S_{A_1A_2A_3} + S_{A_1A_3A_4} + \dots + S_{A_1A_{n-2}A_{n-1}} + S_{A_1A_{n-1}A_n}) \cdot h.$$

Учитывая, что сумма в скобках выражает площадь S основания данной призмы, получим:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h.$$

Следствие 2. Объем прямой призмы равен произведению площади ее основания и бокового ребра.

- ?
1. Какой многогранник называется призмой?
 2. Какие грани призмы называют ее основаниями; боковыми гранями и какие ребра призмы называют боковыми ребрами?
 3. Какой отрезок называют диагональю призмы; высотой призмы?
 4. Какая плоскость называется диагональной плоскостью призмы и какой многоугольник называют диагональным сечением призмы?
 5. Какая призма называется прямой призмой; наклонной призмой?
 6. Какая прямая призма называется правильной призмой?
 7. Какая призма называется параллелепипедом?
 8. Какой параллелепипед называется прямым? Какой прямой параллелепипед называется прямоугольным? Какой прямоугольный параллелепипед называется кубом?
 9. Сформулируйте свойства ребер параллелепипеда; граней параллелепипеда; диагоналей параллелепипеда; диагоналей прямоугольного параллелепипеда.
 10. Какие ребра прямоугольного параллелепипеда называются его измерениями?
 11. Как связаны диагональ прямоугольного параллелепипеда и его измерения?
 12. Из чего состоит боковая поверхность призмы; полная поверхность призмы?
 13. Как связаны между собой боковая поверхность призмы, периметр ее перпендикулярного сечения и боковое ребро?
 14. Как найти боковую поверхность прямой призмы?
 15. Что принимают за единицу объема? Сформулируйте основные свойства объема.
 16. Какие фигуры называют равными; равновеликими? Как связаны равенство и равновеликость фигур?
 17. Как найти объем прямоугольного параллелепипеда по его известным измерениям?
 18. Чему равен объем произвольного параллелепипеда?
 19. Чему равен объем призмы; объем прямой призмы?

1. Докажите, что в прямой призме:

- а) все боковые грани — прямоугольники;
- б) ее высота равна боковому ребру.

2. Докажите, что сечение призмы плоскостью, параллельной основанию, равно этому основанию.

3. Докажите, что в правильной призме:

- а) все боковые грани — равные друг другу прямоугольники;
- б) двугранные углы при боковых ребрах равны друг другу;
- в) любая точка прямой, проходящей через центры оснований, равноудалена от боковых граней, а также от боковых ребер.

4. Верно ли, что:

- а) у параллелепипеда все грани — параллелограммы;
- б) у прямого параллелепипеда основания — параллелограммы, а боковые грани — прямоугольники;
- в) у прямоугольного параллелепипеда все грани — прямоугольники?

5. Докажите, что у параллелепипеда:

- а) есть три четверки равных ребер;
- б) есть три пары равных граней;
- в) его четыре диагонали пересекаются в одной точке, которая является центром симметрии параллелепипеда.

6. Определите:

- а) может ли какая-либо боковая грань наклонного параллелепипеда быть прямоугольником;
- б) сколько боковых граней наклонного параллелепипеда могут быть прямоугольниками.

7. Докажите, что у прямого параллелепипеда есть:

- а) ось симметрии; б) плоскость симметрии.

8. Докажите, что у прямоугольного параллелепипеда:

- а) есть три оси симметрии;
- б) есть три плоскости симметрии;
- в) квадрат диагонали равен сумме квадратов трех его измерений;
- г) все четыре диагонали равны друг другу;
- д) с двумя равными измерениями есть пять плоскостей симметрии;

е) с тремя равными измерениями есть девять плоскостей симметрии;

ж) с тремя равными измерениями есть девять осей симметрии.

9. Найдите диагональ правильной четырехугольной призмы, у которой площадь основания равна 121 см^2 , а высота — 12 см .

10. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, учитывая, что диагонали его граней равны 11 см , 19 см и 20 см .

11. Найдите боковую поверхность и объем наклонной треугольной призмы, у которой:

а) расстояния между параллельными прямыми, содержащими боковые ребра, равны 2 см , 3 см и 4 см , а сами ребра — 5 см ;

б) две боковые грани равны и образуют угол в 60° , а прямая, содержащая их общее ребро длиной a , находится на расстоянии a от плоскости противоположащей боковой грани.

12. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно 8 см , а сторона основания — 4 см . Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через:

а) боковое ребро и середину стороны основания, не имеющей с ребром общих точек;

б) три вершины призмы, которые не принадлежат одной грани.

13. По стороне основания a и боковому ребру l найдите полную поверхность правильной призмы, основанием которой является:

а) треугольник; б) четырехугольник; в) шестиугольник.

14. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 24 см и 10 см , а его диагональ образует с плоскостью основания угол в 45° . Найдите боковое ребро параллелепипеда.

15. Найдите полную поверхность и объем прямоугольного параллелепипеда, учитывая, что:

а) его диагональ равна 81 см , а измерения относятся как $2 : 7 : 26$;

б) диагонали его граней равны 7 см , 8 см и 9 см ;

в) его диагональ имеет длину 12 см и составляет с одной боковой гранью угол в 30° , а с другой — угол в 45° ;

г) сторона его основания длиной a составляет с диагональю основания угол α , а с диагональю боковой грани, в которой эта сторона лежит, — угол β ;

д) диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с одной боковой гранью угол в 30° , а с другой — угол в 45° .

16. Найдите боковую поверхность прямого параллелепипеда и его объем, учитывая, что стороны его основания равны 2 см и 7 см, меньшая диагональ параллелепипеда — 8 см и один из углов основания — 60° .

17. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 3 м и 9 м, а его диагонали составляют с плоскостью основания углы в 45° и 60° . Найдите диагонали параллелепипеда, его боковую поверхность и объем.

18. Найдите боковую поверхность и объем призмы, у которой:

а) основанием является ромб со стороной, равной 10 см, и углом в 60° , а меньшая диагональ составляет с основанием и боковым ребром углы в 45° ;

б) все грани — равные ромбы со стороной, равной 6 см, и углом в 60° .

19. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция с основаниями 50 см и 18 см и высотой 16 см. Найдите двугранные углы при боковых ребрах призмы.

20. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 32 см, а боковое ребро — 24 см. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противоположащую вершину нижнего основания.

21. Боковое ребро AA_1 призмы, основанием которой является правильный треугольник ABC , образует равные углы со сторонами основания AC и AB . Докажите, что:

а) ребра BC и AA_1 перпендикулярны;

б) четырехугольник CC_1B_1B является прямоугольником.

22. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = AC = 13$ см, $BC = 10$ см и боковое ребро образует с плоскостью основания угол в 45° . Перпендикулярной проекцией вершины A_1 на

плоскость треугольника ABC является точка пересечения его медиан. Найдите площадь грани CC_1B_1B .

23. Боковое ребро наклонной четырехугольной призмы равно 24 см, а перпендикулярным сечением является ромб со стороной 10 см. Найдите боковую поверхность призмы.

24. Две боковые грани наклонной треугольной призмы перпендикулярны друг другу, их общее ребро равно 72 см и отстоит от двух других боковых ребер на 36 см и 105 см. Найдите боковую поверхность призмы.

25. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с плоскостью основания угол φ , а с меньшей боковой гранью — угол α . Найдите боковую поверхность параллелепипеда.

26. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с острым углом φ . Через противолежащий ему катет и противолежащую этому катету вершину основания проведено сечение, составляющее угол β с плоскостью основания. Определите, какую часть площади сечения составляет от площади боковой поверхности призмы.

27. Докажите, что:

- а) равные тела являются равновеликими;
- б) равновеликие тела не обязательно являются равными.

28. Тело P составлено из тел M и N , которые имеют соответственно объемы V_1 и V_2 . Выразите объем V тела P через объемы V_1 и V_2 , учитывая, что:

- а) тела M и N не имеют общих внутренних точек;
- б) тела M и N имеют общую часть, объем которой равен $\frac{1}{3} V_1$.

29. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны a и b , а высота — h , учитывая, что:

- а) $a = 22$, $b = 24$, $h = 30$;
- в) $a = 72$, $b = 20\sqrt{3}$, $h = 52$;
- б) $a = 9\sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{5}$, $h = 30\sqrt{10}$;
- г) $a = 3\frac{1}{3}$, $b = \sqrt{5}$, $h = 0,96$.

30. Найдите массу кирпича размерами $25 \text{ см} \times 12 \text{ см} \times 6,5 \text{ см}$, учитывая, что плотность кирпича равна $1,9 \text{ г/см}^3$.

31. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда $PQRTP_1Q_1R_1T_1$, учитывая, что $PR_1 = 13$ см, $QT = 12$ см и $QR_1 = 11$ см.

32. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого:

а) равна 18 см и составляет угол в 30° с плоскостью боковой грани и угол в 45° с боковым ребром;

б) составляет угол α с плоскостью боковой грани и угол β с плоскостью основания, а его высота равна h .

33. Диагональ B_1D прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ составляет с плоскостью основания угол в 45° , а двугранный угол A_1B_1BD равен 60° . Найдите объем параллелепипеда, учитывая, что диагональ основания равна 12 см.

34. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда $MNOPM_1N_1O_1P_1$, учитывая, что:

а) $MO_1 = 1$ м, $\angle O_1MO = 45^\circ$, $\angle O_1MN = 60^\circ$;

б) $MO_1 = 24$ см, $\angle O_1MP_1 = 45^\circ$ и диагональ MO_1 составляет угол в 30° с плоскостью боковой грани.

35. Найдите объем прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, учитывая, что $\angle BAC = 90^\circ$, $BC = 37$ см, $AB = 35$ см, $AA_1 = 11$ см.

36. Найдите объем прямой призмы $XYZX_1Y_1Z_1$, учитывая, что:

а) $\angle YXZ = 120^\circ$, $XY = 5$ см, $XZ = 3$ см и наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см²;

б) $\angle XY_1Z = 60^\circ$, $XY = 4$, $ZY_1 = 12$ и двугранный угол с ребром YY_1 прямой.

37. Пять ребер прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равны a , а остальные четыре ребра равны друг другу. Найдите объем призмы.

38. Найдите объем прямой призмы $BCDB_1C_1D_1$, учитывая, что $BC = CD$, $\angle BCD = \alpha$, диагональ B_1D равна l и составляет с плоскостью основания угол β .

39. Основанием прямой призмы является параллелограмм. Через его сторону, равную a , и противоположащую ей сторону другого основания проведено сечение, которое составляет угол β с плоскостью основания. Найдите объем призмы, учитывая, что площадь сечения равна Q .

40. Через сторону нижнего основания и противоположащую вершину верхнего основания правильной треугольной призмы проведено сечение, образующее с плоскостью основания угол в 60° . Найдите объем призмы, учитывая, что сторона основания равна a .

41. Основанием призмы $KLMK_1L_1M_1$ является равносторонний треугольник KLM со стороной l . Вершина K_1 проектируется в центр этого основания, а ребро KK_1 составляет с плоскостью основания угол φ . Найдите объем призмы.

42. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, наибольшая диагональ которой равна 8 см и составляет с боковым ребром угол в 30° .

43. Найдите объем наклонной призмы, основанием которой является треугольник со сторонами 10 см, 10 см и 12 см, а боковое ребро, равное 8 см, составляет с плоскостью основания угол в 60° .

44. Найдите объем наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$, учитывая, что $AB = BC = CA = a$, ABB_1A_1 — ромб, $AB_1 < BA_1$, $AB_1 = b$, а двугранный угол с ребром AB — прямой.

45. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 5 см. Найдите объем призмы, учитывая, что радиус окружности, описанной около основания призмы, равен 6,5 см, а высота призмы — 10 см.

46. Основанием призмы является вписанный в окружность с радиусом 4 см равнобедренный треугольник с углом 30° при основании. Найдите объем призмы, учитывая, что ее высота равна боковой стороне основания.

47. Найдите объем параллелепипеда, учитывая, что:

- а) основанием его является прямоугольник со сторонами a и b , а боковое ребро длиной c составляет со смежными сторонами основания углы, равные φ ;
- б) все его грани — равные ромбы с диагоналями, равными 6 см и 8 см.

48. Докажите, что объем наклонной призмы равен произведению бокового ребра и площади сечения призмы плоскостью, перпендикулярной этому ребру.

49. Найдите объем наклонной треугольной призмы, учитывая, что расстояния между ее боковыми ребрами равны 37 см, 13 см и 30 см, а площадь боковой поверхности — 480 см^2 .

50. Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда с общей вершиной равны S_1 , S_2 и S_3 . Выразите объем этого параллелепипеда через S_1 , S_2 и S_3 и вычислите его при $S_1 = 12 \text{ дм}^2$, $S_2 = 24 \text{ дм}^2$, $S_3 = 36 \text{ дм}^2$.

51. У трех граней прямоугольного параллелепипеда диагонали, выходящие из одной вершины, равны 21 см, 24 см и 27 см. Найдите объем этого параллелепипеда.

52. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 7 см и $3\sqrt{2}$ см, а острый угол между ними — 45° . Найдите объем параллелепипеда, учитывая, что его меньшая диагональ составляет с плоскостью основания угол в 45° .

53. Диагонали BD_1 и A_1C прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взаимно перпендикулярны и равны 6 см и 8 см, а ребро AB равно 3 см. Найдите объем параллелепипеда.

54. Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен 3 м^3 , а наименьшая и наибольшая из площадей боковых граней — 3 м^2 и $3\sqrt{5} \text{ м}^2$. Найдите длины ребер призмы.

55. Докажите, что объем треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани и расстояния от этой грани до параллельного ей ребра.

56. На трех данных параллельных прямых, не лежащих в одной плоскости, отложены три равных отрезка AA_1 , BB_1 и CC_1 . Докажите, что объем призмы, боковыми ребрами которой являются эти отрезки, не зависит от положения отрезков на данных прямых.

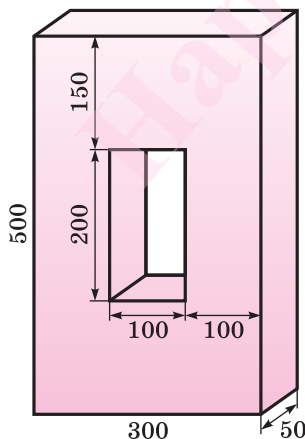


Рис. 24

57. Найдите объем наклонной треугольной призмы, площади боковых граней которой пропорциональны числам 20, 37 и 51, ее боковое ребро равно 0,5 дм, а боковая поверхность — $10,8 \text{ дм}^2$.

58. На рисунке 24 показана деталь. Найдите площадь ее поверхности и объем, учитывая, что размеры даны в миллиметрах.

59. Основанием наклонной призмы $IJKI_1J_1K_1$ является прямоугольный треугольник IJK с катетами IJ и IK , соответственно равными 7 см и 24 см. Вершина I_1 равноудалена от вершин I , J и K . Найдите объем призмы, учитывая, что ребро II_1 составляет с плоскостью основания угол в 45° .

60. Равносторонний треугольник со стороной $\sqrt{3}$ см является основанием треугольной призмы, у которой одна из вершин верхнего основания равноудалена от всех сторон нижнего основания, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол в 60° . Найдите боковую поверхность призмы и ее объем.

61. Найдите такое число m , что $\text{НОД}(m, 48) = 2$ и $\text{НОК}(m, 46) = 3542$.

62. Определите, сколько есть пятизначных чисел, которые:

- а) делятся на 5; в) делятся на 2;
б) не делятся на 5; г) не делятся на 2.

63. Найдите сумму всех целых значений переменной x , при которых значение выражения $\frac{12}{x-5}$ является целым числом.

64. Найдите среднее арифметическое всех целых значений переменной n , при которых значение выражения $\frac{8}{n+3}$ является натуральным числом.

65. Определите, при каких целых значениях переменной n дробь $\frac{2n^2+7n-7}{n+2}$ является сократимой.

66. Найдите наименьшее натуральное число, которое больше 10 и при делении на 24, 45, 56 дает в остатке 1.

67. Число A выражается произведением $p_1^2 p_2^4 p_3^6$ различных простых чисел p_1, p_2, p_3 . Определите количество всех натуральных делителей числа A .

68. Найдите область определения функции:

- а) $y = \sqrt{2x^2 - 9x - 4}$; в) $y = \sqrt{-2 + 5x - 2x^2}$;
б) $y = \sqrt{\frac{1}{3x^2 + 7x + 4}}$; г) $y = \sqrt{\frac{3-5x}{1+2x}}$.

69. Найдите область значений функции:

- а) $y = 2x^2 + 9x - 4$; в) $y = -3 + 7x - 2x^2$;
 б) $y = 3x^2 + 7x + 4$; г) $y = -3x^2 - 2x - 4$.

70. Найдите область значений функции:

- а) $y = 3\sin 2x + 5$; в) $y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{(2x+1)^2+4}$;
 б) $y = -5\cos(3x^2 + 7x + 4)$; г) $y = \operatorname{tg}(3x^2 - 2) + \operatorname{ctg}(3x^2 - 2)$.

71. В окружность вписан равнобедренный треугольник с основанием 10 и боковой стороной 12. Найдите хорду, перпендикулярную высоте, проведенной к основанию, и проходящую через середину высоты.

72. В окружность вписан треугольник, одна из сторон которого равна 21. Параллельно этой стороне через точку пересечения медиан проведена хорда. Найдите стороны треугольника, учитывая, что отрезки хорды вне треугольника равны 8 и 11.

73. В окружность вписан треугольник ABC , медианы AM и BN которого соответственно равны 45 и 63. Луч AM пересекает окружность в точке K . Найдите стороны AC и BC , учитывая, что $MK = 24,2$.

74. В окружность вписан треугольник ABC , и через точку пересечения его биссектрис проведена хорда, параллельная стороне AC . Найдите стороны AC и BC , учитывая, что сторона AB равна 30 и делит хорду на части длиной 8 и 25.

75. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ равна его диагонали BD . Описанная около треугольника ABD окружность делит большую диагональ на отрезки длиной 65 и 16. Найдите стороны параллелограмма.

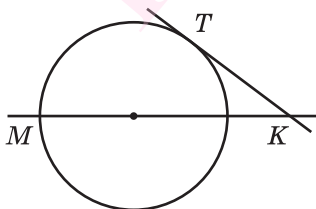


Рис. 25

76. Через точку K проведены к окружности касательная KT и секущая KM , проходящая через центр (рис. 25). Найдите косинус угла MKT , учитывая, что $KM = 2KT$.

77. Постройте треугольник по его медиане m_a и высоте h_a , проведенным из вершины A , и высоте h_b , проведенной из вершины B .

78. В треугольнике ABC проведена высота AM . Определите, может ли радиус вписанной в треугольник AMB окружности быть вдвое больше радиуса окружности, вписанной в треугольник AMC .

79. Найдите наименьшее натуральное число, среди делителей которого есть четыре последовательных двузначных числа.

80. В правильном 12-угольнике $A_1A_2...A_{11}A_{12}$ около вершины A_1 записано отрицательное число, а около остальных вершин — положительные. Разрешается изменять на противоположные знаки у шести чисел, стоящих рядом. Можно ли после нескольких таких действий получить около вершины A_2 отрицательное число, а около остальных вершин положительные?

2. Цилиндр

Цилиндром называется тело, полученное вращением прямоугольника вокруг оси, проходящей через его сторону (рис. 26). На рисунке 27 показано образование цилиндра при вращении прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой l , которой принадлежит сторона AD . При этом ломаная $ABCD$ описывает *поверхность цилиндра*, отрезок BC — *боковую поверхность*, а отрезки AB и DC — *основания цилиндра* (рис. 28). Прямая, проходящая через центры оснований, называется *осью цилиндра*,

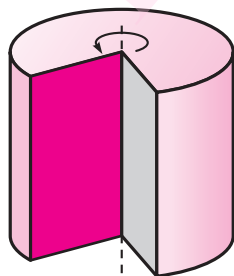


Рис. 26

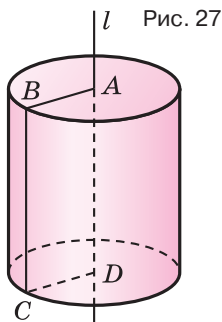


Рис. 27

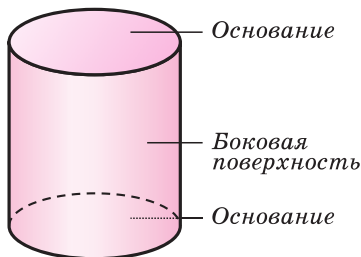


Рис. 28

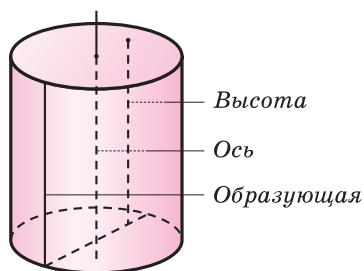


Рис. 29

отрезок, соединяющий окружности оснований и перпендикулярный им, — *образующей* цилиндра, а перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки одного основания на другое основание, — *высотой* цилиндра (рис. 29). Образующая цилиндра является его высотой.

Поверхность цилиндра можно развернуть на плоскость, в результате получится прямоугольник, представляющий боковую поверхность цилиндра, и два круга, представляющих его основания. На рисунке 30 показан цилиндр и его развертка.

Теорема 4. *Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания и образующей:*

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r l.$$

Доказательство проведите самостоятельно, используя рисунок 30.

На плоскости важной конфигурацией, которая часто встречается в задачах, является сочетание окружности с прямой. Подобной пространственной конфигурацией является сочетание цилиндра с плоскостью.

Если цилиндр пересечь плоскостью, параллельной основанию, то получится круг, равный основанию (рис. 31), а если плоскостью, перпендикулярной основанию, то — прямоугольник, одна сторона которого равна высоте цилиндра (рис. 32). *Осевое сечение* цилиндра, т. е. сечение плоскостью, проходя-

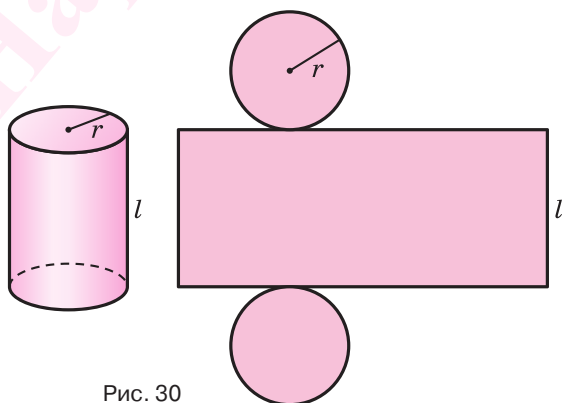


Рис. 30

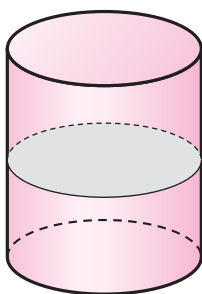


Рис. 31

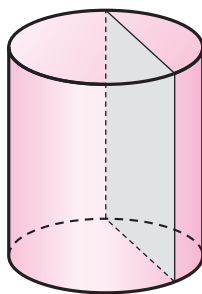


Рис. 32

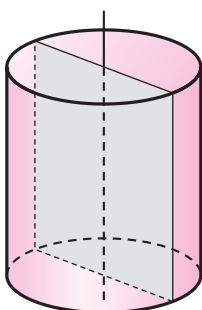


Рис. 33

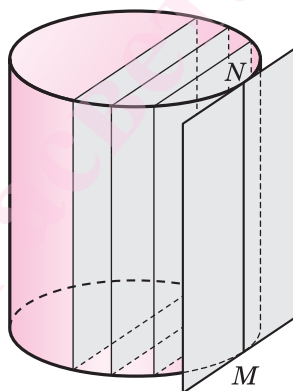


Рис. 34

щей через ось цилиндра, является прямоугольником, стороны которого равны высоте цилиндра и диаметру его основания (рис. 33).

▲ Будем двигать плоскость, проходящую через ось цилиндра, параллельно самой себе (рис. 34). При этом две противолежащие стороны прямоугольника-сечения цилиндра, являющиеся хордами оснований, будут уменьшаться, а две другие стороны, которые являются образующими цилиндра, — сближаться до того момента, пока не совпадут. Получим плоскость, содержащую образующую MN цилиндра и не имеющую с ним других общих точек. Такая плоскость называется *касательной плоскостью цилиндра*. Любая прямая, проведенная в касательной плоскости цилиндра и отличная от образующей, имеет с цилиндром единственную общую точку. Такая прямая называется *касательной прямой цилиндра*. ▲

Теорема 5. Если плоскость касается цилиндра по некоторой образующей, то ей перпендикулярна плоскость, проходящая через эту образующую и ось цилиндра.

▲ **Доказательство.** Пусть плоскость α касается цилиндра с осью AB по образующей MN (рис. 35). Докажем, что плоскость, содержащая образующую MN и ось AB , перпендикулярна плоскости α .

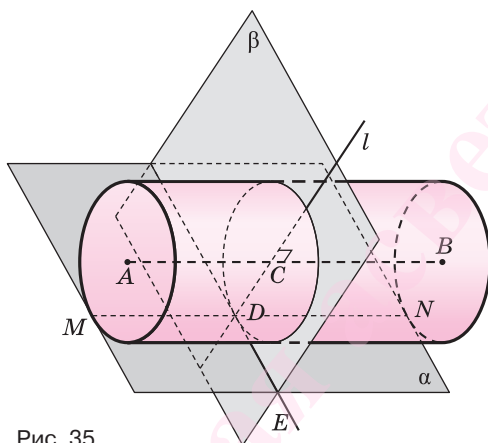


Рис. 35

Проведем прямую l , которая пересекает прямую AB в точке C , прямую MN в точке D и перпендикулярна оси AB . Через точку D проведем плоскость β , перпендикулярную образующей MN . Эта плоскость пересекает цилиндр по кругу, центр которого находится в точке C , а плоскость α — по прямой DE , касающейся окружности с центром C . Учитывая свойство касательной к окружности, можем утверждать, что прямая DE перпендикулярна радиусу CD окружности с центром в точке C . Кроме того, поскольку прямая AB параллельна прямой MN , то прямая l перпендикулярна прямой MN . Получили, что прямая l перпендикулярна как прямой MN , так и прямой DE , которые пересекаются и лежат в плоскости α . Поэтому по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая l перпендикулярна плоскости α . Но плоскость, содержащая образующую MN и ось AB , проходит и через прямую l . Поэтому она, по признаку перпендикулярности плоскостей, перпендикулярна плоскости α . ▲

Теорема 5 выражает свойство касательной плоскости цилиндра.

Теорема 6. *Плоскость касается цилиндра, если она проходит через его образующую и перпендикулярна плоскости, содержащей эту образующую и ось цилиндра.*

▲ **Доказательство.** Пусть плоскость α содержит образующую MN цилиндра и перпендикулярна плоскости, проходящей через эту образующую и ось AB (рис. 36). Докажем, что плоскость α не имеет с цилиндром других общих точек, кроме точек образующей MN .

Пусть E — точка плоскости α , не принадлежащая образующей MN . Через эту точку проведем плоскость β , перпендикулярную оси AB . Она пересечет цилиндр по кругу с центром F , образующую MN в некоторой точке G и плоскость α по прямой GE . Поскольку плоскости β и MAB обе перпендикулярны плоскости α , то их линия пересечения FG также перпендикулярна плоскости α , а потому $FG \perp GE$. Учитывая, что FE и FG — соответственно гипотенуза и катет прямоугольного треугольника EFG , получим, что $FE > FG$. Значит, точка E не принадлежит цилиндру с осью AB . ▲

Теорема 6 выражает признак касательной плоскости цилиндра.

Пусть имеется цилиндр (рис. 37). Впишем в одно из оснований цилиндра многоугольник $A_1A_2...A_{n-1}A_n$, через его вершины $A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n$ проведем образующие $A_1B_1, A_2B_2, ..., A_{n-1}B_{n-1}, A_nB_n$ и соединим их другие концы $B_1, B_2, ..., B_{n-1}, B_n$. В результате получим призму $A_1A_2...A_{n-1}A_nB_1B_2...B_{n-1}B_n$. Ее называют призмой, вписанной в цилиндр, а сам цилиндр называют цилиндром, описанным около призмы. Если ци-

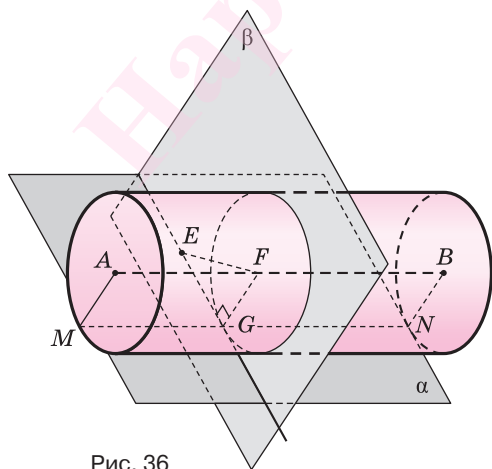


Рис. 36

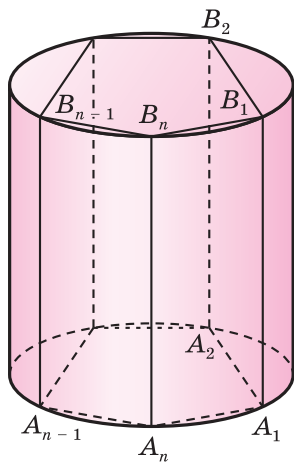


Рис. 37

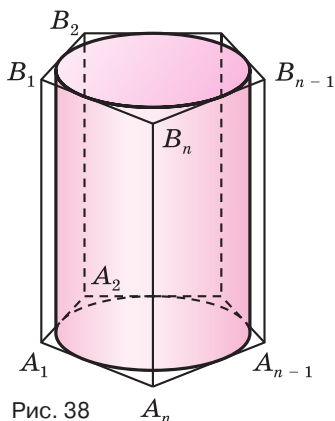


Рис. 38

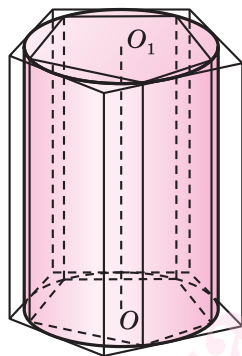


Рис. 39

линдра описан около призмы, то основания цилиндра описаны около оснований призмы, а боковая поверхность цилиндра содержит боковые ребра призмы.

Подобным образом вводится понятие *призмы, описанной около цилиндра*, и *цилиндра, вписанного в призму* (рис. 38). Если призма описана около цилиндра, то ее основания описаны около оснований цилиндра, а боковые грани касаются боковой поверхности цилиндра.

Теорема 7. *Объем цилиндра равен произведению площади его основания и образующей:*

$$V = S_{\text{осн}} \cdot l.$$

Доказательство. Пусть имеется цилиндр с осью OO_1 (рис. 39). В него впишем правильную призму $A_1A_2...A_{n-1}A_nB_1B_2...B_{n-1}B_n$ и, кроме того, около него опишем правильную призму $C_1C_2...C_{n-1}C_nD_1D_2...D_{n-1}D_n$. В соответствии с теоремой 3 объем первой призмы равен произведению площади многоугольника $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ и высоты призмы, которая равна боковому ребру A_1B_1 , а объем второй — произведению площади многоугольника $C_1C_2...C_{n-1}C_n$ и той же высоты. Объем самого цилиндра заключен между этими объемами.

Будем количество n сторон оснований призмы делать все большим и большим. Тогда объем первой призмы увеличивается, объем второй — уменьшается, а разность между ними стремится к нулю, если количество сторон n становится неограниченно большим. То число, к которому приближаются объемы обеих призм, принимается за объем цилиндра.

В описанном процессе высота H призмы остается равной боковому ребру, которое равно образующей l цилиндра, а пло-

щади многоугольников $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ и $C_1C_2...C_{n-1}C_n$ стремятся к площади S круга, лежащего в основании цилиндра. Значит, объем V цилиндра равен произведению площади S основания и образующей l цилиндра:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot l.$$

- ?
1. Какое тело называется цилиндром?
 2. Что называют поверхностью цилиндра; боковой поверхностью цилиндра; основаниями цилиндра?
 3. Какую прямую называют осью цилиндра?
 4. Какой отрезок называют образующей цилиндра; высотой цилиндра?
 5. Чему равна боковая поверхность цилиндра; объем цилиндра?
 6. Какая фигура получается при пересечении цилиндра плоскостью, параллельной основанию цилиндра; перпендикулярной основанию цилиндра?
 7. Какое сечение цилиндра называют осевым сечением?
 8. Что называют касательной плоскостью цилиндра и чем является линия касания?
 9. Какая прямая называется касательной прямой цилиндра?
 10. Сформулируйте свойство касательной плоскости цилиндра.
 11. Сформулируйте признак касательной плоскости цилиндра.
 12. Когда говорят, что призма вписана в цилиндр; цилиндр описан около призмы?
 13. Когда говорят, что цилиндр вписан в призму; призма описана около цилиндра?

81. Верно ли, что:

- а) высота цилиндра равна его образующей;
- б) сечение цилиндра плоскостью, параллельной основанию, есть круг, равный основанию;
- в) сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной основанию, есть прямоугольник, одна сторона которого равна высоте цилиндра;
- г) ось цилиндра параллельна его образующей;
- д) осевое сечение цилиндра является прямоугольником, смежные стороны которого равны высоте цилиндра и диаметру основания;
- е) плоскость, параллельная основанию цилиндра, отсекает от него тело, которое также является цилиндром?

82. Докажите, что:

- а) плоскость, определенная осью цилиндра и образующей, по которой другая плоскость касается цилиндра, перпендикулярна касательной плоскости;

б) плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная плоскости, определенной этими образующей и осью цилиндра, является касательной плоскостью цилиндра.

83. Имеет ли цилиндр:

- а) центр симметрии;
- б) оси симметрии;
- в) плоскости симметрии?

84. Учитывая, что точка M является точкой образующей TT_1 цилиндра с осью OO_1 , точка M_1 — проекцией точки M на эту ось, прямая a касается окружности основания с центром O , а прямая b касается цилиндра в точке M (рис. 40), укажите, какой может быть величина угла между:

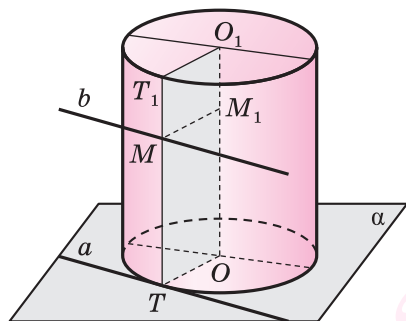


Рис. 40

а) плоскостью TT_1O и прямой a ;

- б) плоскостью TT_1O и прямой b ;
- в) прямыми TT_1 и TO ;
- г) прямыми TT_1 и MM_1 .

85. Докажите, что если плоскость параллельна оси цилиндра и отстоит от нее на радиус цилиндра, то плоскость содержит образующую цилиндра, и притом только одну, т. е. является касательной плоскостью цилиндра.

86. Определите, какую фигуру образуют точки поверхности цилиндра, равноотстоящие от:

- а) двух точек основания;
- б) двух образующих.

87. Найдите диагональ осевого сечения цилиндра, учитывая, что радиус цилиндра и его высота соответственно равны:

- а) 1,5 м и 4 м;
- б) 10 см и 21 см;
- в) 22 и 117.

88. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 24 см, а угол между ней и образующей цилиндра — 60° . Найдите:

- а) высоту цилиндра;
- б) радиус цилиндра;
- в) площадь сечения.

89. Цилиндр получен вращением квадрата со стороной a вокруг одной из его сторон. Найдите:

- а) площадь осевого сечения цилиндра;
- б) площадь боковой поверхности цилиндра;
- в) площадь полной поверхности цилиндра;
- г) объем цилиндра.

90. Осевое сечение цилиндра — квадрат, диагональ которого равна 40 см. Найдите:

- а) высоту цилиндра;
- б) площадь основания цилиндра;
- в) боковую поверхность цилиндра;
- г) объем цилиндра.

91. Осевые сечения двух цилиндров равны. Можно ли утверждать, что равны и высоты этих цилиндров?

92. Площадь осевого сечения цилиндра равна 40 м^2 , а площадь его основания — 10 м^2 . Найдите высоту цилиндра.

93. Высота цилиндра равна 16 см, радиус его основания — 10 см. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной его оси, учитывая, что расстояние между этими плоскостью и осью равно 6 см.

94. Цилиндр, высота которого равна 12 см, а радиус основания — 10 см, пересечен такой плоскостью, параллельной оси цилиндра, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от оси цилиндра до секущей плоскости.

95. Через образующие AB и CD цилиндра с радиусом основания r и высотой h проведено сечение, которое отсекает от окружности основания дугу в 60° . Найдите площадь этого сечения.

96. Есть цилиндр, радиус основания которого равен r , а высота — h . Точки A и B на окружностях оснований цилиндра выбраны так, что прямая AB находится на расстоянии d от оси цилиндра. Найдите:

- а) h , учитывая, что $r = 10 \text{ дм}$, $d = 8 \text{ дм}$, $AB = 13 \text{ дм}$;
- б) d , учитывая, что $h = 12 \text{ см}$, $r = 10 \text{ см}$, $AB = 20 \text{ см}$.

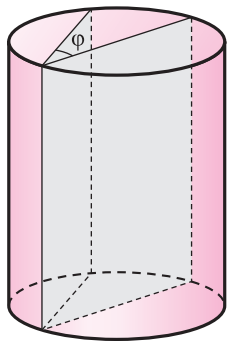


Рис. 41

97. Через одну образующую цилиндра проведены две секущие плоскости, из которых одна проходит через ось цилиндра под углом φ к другой (рис. 41). Найдите отношение площадей сечений цилиндра этими плоскостями.

98. Высота цилиндра равна h , а площадь осевого сечения — S . Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной его оси и отстоящей от нее на d .

99. Через образующую цилиндра проведены две такие взаимно перпендикулярные плоскости, что площади полученных сечений равны S каждая. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

100. Найдите боковую поверхность и объем цилиндра, диаметр основания которого равен 1 м, а высота равна длине окружности основания.

101. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, боковая поверхность которого равна S .

102. Найдите радиус основания цилиндра с полной поверхностью 288π см² и его высоту, учитывая, что она на 12 см больше радиуса основания.

103. Определите, сколько квадратных метров листовой жести пойдет на изготовление трубы длиной 4 м и диаметром 25 см, учитывая, что на швы необходимо добавить 2,5 % площади ее боковой поверхности.

104. Найдите боковую и полную поверхности цилиндра, у которого угол между диагоналями развертки боковой поверхности равен φ , а сама диагональ — d .

105. Учтявая, что один цилиндр получен вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой AB , другой — вращением того же прямоугольника вокруг прямой BC :

- а) докажете, что боковые поверхности этих цилиндров равны;
- б) найдите отношение площадей полных поверхностей этих цилиндров, учитывая, что $AB = p$, $BC = q$.

106. При вращении прямоугольника вокруг неравных сторон получаются цилиндры, полные поверхности которых равны S_1 и S_2 . Найдите диагональ прямоугольника.

107. Боковая поверхность цилиндра равна площади круга, описанного вокруг его осевого сечения. Найдите отношение радиуса цилиндра к его высоте.

108. Концы отрезка лежат на окружностях оснований цилиндра, а угол между радиусами, проведенными в его концы, равен 30° (рис. 42). Найдите угол между этим отрезком и осью, учитывая, что осевым сечением цилиндра является квадрат.

109. Плоскость, параллельная оси цилиндра с высотой 10 дм, пересекает его по прямоугольнику с площадью 240 дм^2 . Найдите боковую поверхность цилиндра, учитывая, что расстояние от оси цилиндра до плоскости равно 9 дм.

110. Найдите высоту и радиус цилиндра, у которого площадь боковой поверхности наибольшая, учитывая, что периметр осевого сечения цилиндра равен $2p$.

111. На окружностях оснований цилиндра, высота и радиус основания которого соответственно равны 20 см и 70 см, выбраны точки A, B, C, D , являющиеся вершинами квадрата (рис. 43). Найдите его сторону.

112. Треугольная пирамида, все ребра которой равны a , и цилиндр расположены так, что одна вершина пирамиды является центром основания цилиндра, а три остальные лежат на окружности другого основания (рис. 44). Найдите полную поверхность цилиндра.

113. Восьмигранник, все грани которого являются правильными треугольниками, и цилиндр расположены так, что две вершины восьмигранника являются центрами оснований

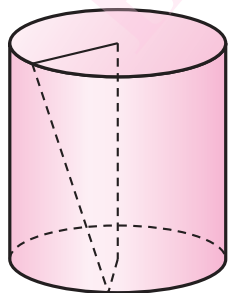


Рис. 42

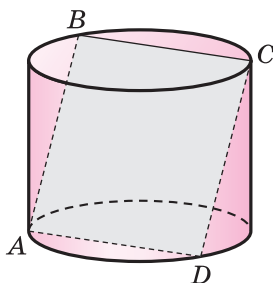


Рис. 43

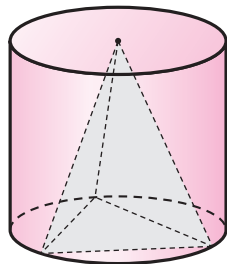


Рис. 44

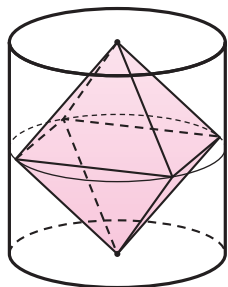


Рис. 45

цилиндра, а остальные лежат на цилиндрической поверхности (рис. 45). Найдите площадь осевого сечения цилиндра, учитывая, что его высота равна h .

114. Учитывая, что V , r и h — соответственно объем, радиус и высота цилиндра, найдите:

- а) V , если $r = 3\sqrt{2}$ см, $h = 6$ см;
- б) r , если $V = 120$ см³, $h = 3,6$ см;
- в) h , если $r = h$, $V = 27\pi$ см³.

115. Найдите длину алюминиевого провода диаметром 4 мм, учитывая, что его масса равна 6,8 кг, а плотность алюминия — 2,6 г/см³.

116. Определите, сколько тонн нефти содержит цилиндрическая цистерна диаметром 18 м и длиной 7 м, учитывая, что плотность нефти равна 0,85 г/см³.

117. Найдите объем цилиндра, у которого площадь основания равна Q , а площадь осевого сечения — S .

118. Найдите массу свинцовой трубы длиной 25 м с толщиной стенок 4 мм и внутренним диаметром 13 мм, учитывая, что плотность свинца равна 11,34 г/см³.

119. Определите, во сколько раз нужно увеличить:

- а) высоту цилиндра без изменения его основания, чтобы объем увеличился в n раз;
- б) радиус основания цилиндра без изменения его высоты, чтобы объем увеличился в n раз.

120. Докажите, что полная поверхность цилиндра равна боковой поверхности другого цилиндра того же радиуса, высота которого равна сумме радиуса и высоты данного цилиндра.

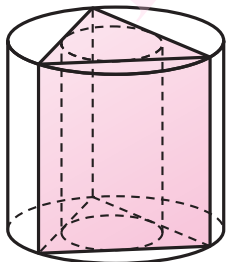


Рис. 46

121. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в призму вписан цилиндр (рис. 46). Найдите отношение объемов цилиндров.

122. Найдите объем цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, у которой каждое ребро равно a .

123. В цилиндр вписана правильная n -угольная призма. Найдите отношение объемов призмы и цилиндра, учитывая, что:

- а) $n = 3$; в) $n = 6$; д) n — натуральное число.
б) $n = 4$; г) $n = 8$;

124. В цилиндр, радиус основания и высота которого равны друг другу, вписана правильная шестиугольная призма. Найдите угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра.

125. В цилиндр вписана призма, основанием которой является прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему углом α . Найдите объем цилиндра, учитывая, что высота призмы равна h .

126. Найдите объем цилиндра, учитывая, что диагональ вписанного в него прямоугольного параллелепипеда равна m и составляет с основанием угол α .

127. Есть правильная треугольная призма с боковым ребром a . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в эту призму, учитывая, что отрезок, соединяющий середину бокового ребра с центром основания, составляет с основанием угол α (рис. 47).

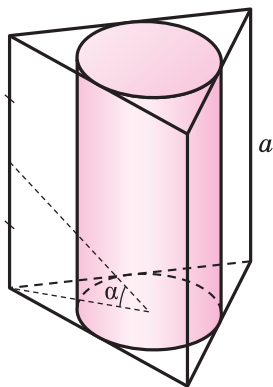


Рис. 47

128. Определите, можно ли вписать цилиндр в прямую призму, если ее основанием является:

- а) треугольник; в) прямоугольник;
б) ромб; г) трапеция.

129. Определите, можно ли описать цилиндр около прямой призмы, если ее основанием является:

- а) треугольник; в) прямоугольник;
б) ромб; г) трапеция.

130. Цилиндр вписан в прямой параллелепипед, основанием которого является ромб с меньшей диагональю m и большим углом α . Сечение, проведенное через меньшую диагональ одного основания и конец большей диагона-

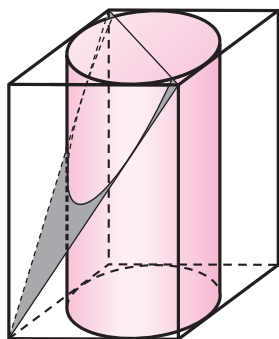


Рис. 48

ли другого, составляет с основанием угол в 45° (рис. 48). Найдите объем цилиндра.

131. Определите, около какой прямой призмы можно описать цилиндр, если эта призма:

- а) треугольная;
- б) четырехугольная.

132. Определите, в какую прямую призму можно вписать цилиндр, если эта призма:

- а) треугольная;
- б) четырехугольная.

133. Докажите, что:

- а) если прямая четырехугольная призма вписана в цилиндр, то сумма противоположных двугранных углов при боковых ребрах равна 180° ;
- б) если четырехугольная прямая призма описана около цилиндра, то суммы площадей противоположных боковых граней равны.

134. Найдите значение выражения:

- а) $\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{-3} \cdot 81^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 + \left(\frac{1}{6}\right)^{-4}}{225}$;
- б) $\frac{\left(\frac{1}{15}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{75}\right)^{-4} \cdot \frac{9}{125} + 0,2^{-2}}{17,5}$;
- в) $\frac{(\sqrt{12} - \sqrt{8}) \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{36} - 2\sqrt{6}) \cdot \left(2 + \frac{2}{9}\right)}$;
- г) $\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{72}}{2\sqrt{54} - \sqrt{144}}$.

135. Упростите выражение и найдите его значение при указанном значении переменной:

- а) $\frac{\sqrt{a^3} + a\sqrt{18} + 6\sqrt{a} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{a^3} + a\sqrt{2} + 2\sqrt{a} + \sqrt{8}} - 1, a = 2$;
- б) $\frac{b^2 - 4}{b - 2\sqrt{2b} + 2} : \frac{b + \sqrt{8b} + 2}{12}, b = 26$;
- в) $\frac{(c - \sqrt{24c} + 6)(\sqrt{c} + \sqrt{6})}{c\sqrt{c} - \sqrt{216}} : \frac{4}{c + \sqrt{6c} + 6}, c = 18$;
- г) $\frac{(d - \sqrt{5d} + 5)(\sqrt{d} - \sqrt{5})}{d - 5} : \frac{(d\sqrt{d} + \sqrt{125})}{(\sqrt{d} + \sqrt{5})^2}, d = 20$.

136. Упростите выражение:

- а) $\sqrt{\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+1}} - \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}}$, учитывая, что $x = \frac{2\sqrt{a}}{a+1}$ и $a > 1$;
- б) $\frac{\sqrt{m+x} + \sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x} - \sqrt{m-x}}$, учитывая, что $x = \frac{2mn}{n^2+1}$, $m > 0$ и $0 < n < 1$;
- в) $\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}} \right)^{-2}$, учитывая, что $x = a\sqrt{\frac{m^2+n^2}{2mn}}$ и $0 < m < n$;
- г) $\frac{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx}}$, учитывая, что $x = \frac{2am}{b(m^2+1)}$ и $|m| < 1$.

137. Вычислите:

- а) $(3 - \sqrt{5})\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$; в) $\frac{\sqrt{26+6\sqrt{17}}}{\sqrt{26-6\sqrt{17}}} + \frac{\sqrt{26-6\sqrt{17}}}{\sqrt{26+6\sqrt{17}}}$;
- б) $(3 - \sqrt{2})\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$; г) $\frac{\sqrt{39+9\sqrt{17}}}{\sqrt{39-9\sqrt{17}}} + \frac{\sqrt{39-9\sqrt{17}}}{\sqrt{39+9\sqrt{17}}}$.

138. Найдите сумму целых решений системы уравнений:

- а) $\begin{cases} \sqrt{(x+7)^2} = x+7, \\ \sqrt{(x-2)^2} = 2-x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{(2x-5)^2} = 5-2x, \\ \sqrt{(x+5)^2} = 5+x. \end{cases}$

139. Решите неравенство:

- а) $x^2 - 2x - 3 < 0$; г) $-2t^2 - 3t - 1 \geq 0$;
- б) $y^2 + y - 2 > 0$; д) $3u^2 + 10u + 3 \geq 0$;
- в) $2z^2 + 5z + 3 \leq 0$; е) $5v^2 + 7v + 2 \leq 0$.

140. Решите неравенство:

- а) $\frac{5}{b} < \frac{3}{3-b}$; в) $\frac{4}{6-x} > \frac{6}{x}$; д) $\frac{2}{y} - \frac{5}{6-y} < 0$;
- б) $\frac{3}{a} + \frac{1}{a-7} > 0$; г) $\frac{10}{c} + \frac{12}{c-2} < 0$; е) $\frac{2}{10-d} + \frac{7}{d} > 0$.

141. Решите неравенство:

- а) $\frac{3t+2}{t^2+t-2} > -1$; в) $\frac{2u-7}{u^2+2u-8} < 1$; д) $\frac{7s+1}{s^2+4s+3} < 1$;
- б) $\frac{w+5}{w^2-1} < 1$; г) $\frac{5l+1}{l^2-3l-4} > -1$; е) $\frac{19t+53}{t^2-4t+3} > -1$.

142. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = 2x^2 - 7x - 4$; в) $y = \frac{3x-7}{2x+1}$;

б) $y = -3x^2 - 7x + 5$; г) $y = \frac{1}{3x^2 + 2x + 4}$.

143. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

а) $y = 2x^2 - 7x - 4$; в) $y = \frac{4x-1}{3x^2 + 2x - 5}$;

б) $y = -3x^3 - 7x^2 + 5x$; г) $y = \frac{-3x^2 + 2x + 5}{3x^2 - 4x + 2}$.

* * *

144. Окружность касается оснований AD и BC трапеции $ABCD$ в точках M и N , а боковых сторон — в точках P и Q . Докажите, что если прямые MC , ND и PQ пересекаются в одной точке, то трапеция равнобедренная.

145. Решите уравнение

$$(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2.$$

146. Решите неравенство $\frac{2x^2}{(1 - \sqrt{1+2x})^2} < x + 4$.

147. Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 3 + \sqrt{7}$, $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$. Найдите a_{2010} .

Степень с действительным показателем

3. Корень из числа

Вам уже известно, что уравнение

$$x^2 = a$$

при неотрицательном значении a имеет два корня:

$$x_1 = \sqrt{a}; \quad x_2 = -\sqrt{a},$$

где выражение $\sqrt{a}$ обозначает арифметический квадратный корень из числа a , т. е. такое неотрицательное число, квадрат которого равен a .

Рассмотрим уравнение

$$x^n = a,$$

где a — некоторое действительное число, n — натуральное число. Корень этого уравнения называют *корнем n -й степени из числа a* .

Корнем n -й степени из числа a называется такое число, n -я степень которого равна a .

Теорема 1. *Из положительного числа существует единственный положительный корень степени n .*

Доказательство. Пусть a — положительное число. Нужно доказать, что существует такое единственное положительное число x , что

$$x^n = a.$$

Доказательство существования искомого числа x выходит за пределы тех возможностей, которые теперь у нас есть. Покажем на примере, как можно найти приближенное значение положительного корня n -й степени из положительного числа с любой степенью точности.

Пусть нужно найти значение корня третьей степени из числа 6. Приближенными значениями этого корня с точнос-

тью до единицы являются число 1 с недостатком и число 2 с избытком, так как

$$1^3 = 1 \text{ и } 1 < 6, \text{ а } 2^3 = 8 \text{ и } 8 > 6.$$

Чтобы найти нужное значение с точностью до десятой, следует испытать числа

$$1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9.$$

Поскольку

$$1,8^3 = 5,832 \text{ и } 5,832 < 6, \text{ а } 1,9^3 = 6,859 \text{ и } 6,859 > 6,$$

то нужное значение находится между числами 1,8 и 1,9.

Испытав числа

$$1,81; 1,82; 1,83; 1,84; 1,85; 1,86; 1,87; 1,88; 1,89,$$

найдем, что значение корня третьей степени из числа 3 находится между числами 1,81 и 1,82.

Если этот процесс продолжать далее, то мы будем получать искомое значение корня с все большей точностью.

Докажем *единственность* положительного корня степени n из положительного числа a . Пусть есть два таких положительных числа x_1 и x_2 , что $x_1^n = a$ и $x_2^n = a$. Тогда $x_1^n = x_2^n$.

Допустим, что $x_1 > x_2$, тогда по соответствующему свойству числовых неравенств получим, что $x_1^n > x_2^n$, а это противоречит отношению $x_1^n = x_2^n$.

Также ведет к противоречию и допущение о том, что $x_1 < x_2$.

Поэтому для x_1 и x_2 остается единственная возможность: $x_1 = x_2$.

Неотрицательный корень n -й степени из неотрицательного числа называют арифметическим корнем n -й степени.

Корень n -й степени из числа a обозначают $\sqrt[n]{a}$. Число n называют *показателем корня*, число a — *подкоренным выражением*. Если подкоренное выражение a неотрицательно, то $\sqrt[n]{a}$ обозначает арифметический корень.

Действие нахождения корня n -й степени из числа a называется *извлечением корня степени n* . Это действие является

обратным для действия возведения в натуральную степень n (рис. 49).

Корень второй степени называют еще *квадратным корнем*, корень третьей степени — *кубическим корнем*.

Пример 1. а) Запись $\sqrt[4]{81}$ означает корень четвертой степени из числа 81.

$$\sqrt[4]{81} = 3, \text{ так как } 3 \geq 0 \text{ и } 3^4 = 81.$$

б) Запись $\sqrt[6]{64}$ означает корень шестой степени из числа 64.

$$\sqrt[6]{64} = 2, \text{ так как } 2 \geq 0 \text{ и } 2^6 = 64.$$

в) Запись $\sqrt[5]{-32}$ означает корень пятой степени из числа -32 .

$$\sqrt[5]{-32} = -2, \text{ так как } (-2)^5 = -32.$$

$$\text{г) } \sqrt[17]{1} = 1, \text{ так как } 1^{17} = 1.$$

$$\text{д) } \sqrt[11]{0} = 0, \text{ так как } 0^{11} = 0.$$

Теорема 2. Из положительного числа:

а) не существует отрицательного корня нечетной степени;

б) существует единственный отрицательный корень четной степени, причем он противоположен положительному корню из данного числа.

Доказательство. Пусть a — положительное число.

Пусть степень n корня — нечетное число. Допустим, что есть такое отрицательное число x_0 , для которого истинно равенство $x_0^n = a$. Поскольку по условию x_0 — отрицательное число, то число x_0^n также отрицательное как произведение нечетного количества отрицательных чисел. Получается, что левый компонент x_0^n равенства $x_0^n = a$ — отрицательное число, а его правый компонент a — положительное число. Но такое невозможно. Поэтому допущение о существовании отрицательного корня нечетной степени из положительного числа нужно отклонить и признать, что отрицательного корня нечетной степени из положительного числа не существует.

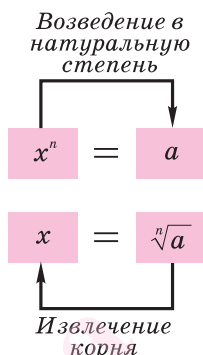


Рис. 49

Пусть степень n корня — четное число. По теореме 1 существует единственный положительный корень x_0 уравнения $x^n = a$. А если истинно равенство $x_0^n = a$, то истинно и равенство $(-x_0)^n = a$. А это означает, что $-x_0$ — отрицательный корень уравнения $x^n = a$. Единственность отрицательного корня устанавливается так же, как и единственность положительного корня.

Теорема 3. Из отрицательного числа:

а) не существует корней четной степени;

б) существует единственный корень нечетной степени, причем это отрицательное число.

Доказательство. Пусть a — отрицательное число.

Пусть степень n корня — четное число. Допустим, что есть такое число x_0 , для которого истинно равенство $x_0^n = a$. Тогда число x_0^n неотрицательно как произведение четного количества равных чисел x_0 . Получается, что левый компонент x_0^n равенства $x_0^n = a$ — неотрицательное число, а его правый компонент a — отрицательное число. Получили противоречие. Поэтому допущение о существовании корня четной степени из отрицательного числа нужно отклонить и признать, что не существует корней четной степени из отрицательного числа.

Пусть степень n корня — нечетное число. Тогда корень x_0 степени n из отрицательного числа a не может быть неотрицательным, так как в противном случае в равенстве $x_0^n = a$ левый компонент x_0^n был бы неотрицательным, а правый компонент a отрицательным.

Поскольку a — число отрицательное, то противоположное число $-a$ положительное. В соответствии с теоремой 1 существует положительный корень x_0 уравнения $x^n = -a$, т. е. истинно равенство $x_0^n = -a$. Тогда $-x_0^n = a$. Поскольку по условию число n нечетное, то $(-x_0)^n = -x_0^n$. Значит, $(-x_0)^n = a$. А это и означает, что отрицательное число $-x_0$ есть корень нечетной степени n из отрицательного числа a .

Единственность отрицательного корня нечетной степени из отрицательного числа устанавливается так же, как и единственность положительного корня.

Таким образом, если $a \geq 0$, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет значение при любом натуральном значении n , как четном, так

и нечетном, а если $a < 0$, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет значение только при нечетном натуральном значении n .

По определению корня, при каждом значении a , при котором выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет значение, истинно равенство

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Следствие 1. *Корни нечетной степени n из противоположных чисел являются противоположными числами:*

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}, \text{ если } n \text{ — нечетное число.}$$

Действительно, если n — нечетное число, то истинное равенство $(-\sqrt[n]{a})^n = -a$ означает, что число $-\sqrt[n]{a}$ является значением корня степени n из числа $-a$: $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Следствие 2.

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{если } n \text{ — нечетное натуральное число,} \\ |a|, & \text{если } n \text{ — четное натуральное число.} \end{cases}$$

Рассмотрим примеры решения уравнений вида $x^n = a$.

Пример 2. Решим уравнение $a^5 = 11$.

Уравнение имеет единственный корень. Он является положительным числом, пятая степень которого равна 11, т. е. числом $\sqrt[5]{11}$.

Число $\sqrt[5]{11}$ иррациональное. С помощью калькулятора находим, что с точностью до тысячной оно равно 1,615.

Пример 3. Решим уравнение $b^4 = 21$.

Уравнение имеет два корня, которые являются противоположными числами. Положительный корень — это положительное число, четвертая степень которого равна 21, т. е. число $\sqrt[4]{21}$. Отрицательный корень — число $-\sqrt[4]{21}$.

Числа $\sqrt[4]{21}$ и $-\sqrt[4]{21}$ иррациональные. С помощью калькулятора находим, что с точностью до десятичной они равны 2,1407 и -2,1407.

Пример 4. Решим уравнение $a^9 = -373$.

Уравнение имеет единственный корень. Он является отрицательным числом, девятая степень которого равна -373, т. е. числом $\sqrt[9]{-373}$, или, используя представление с помощью арифметического корня, числом $-\sqrt[9]{373}$.

Число $-\sqrt[9]{373}$ иррациональное. Его десятичное приближение с точностью до десятичной равно -1,9308.

1. Какое число называется корнем степени n из числа a ?
2. Какое действие называют извлечением корня?
3. Какой корень называют квадратным; кубическим?
4. Что называют показателем корня; подкоренным выражением?
5. Какой корень называют арифметическим корнем степени n ?
6. Какова область определения выражения $\sqrt[n]{a}$ при четном значении n ; при нечетном значении n ?
7. Как корень нечетной степени из отрицательного числа выразить с помощью арифметического корня?
8. Чему равно значение выражения $\sqrt[n]{a^n}$ при различных значениях n ?

148. Найдите устно арифметический квадратный корень из числа:

- а) 1; б) 25; в) 289; г) 225; д) $\frac{25}{121}$; е) $\frac{49}{400}$.

149. Найдите устно арифметический кубический корень из числа:

- а) 125; б) $\frac{1}{27}$; в) 0,027; г) $\frac{8}{27}$; д) $\frac{64}{125}$.

150. Определите, верно ли что:

- а) $\sqrt[4]{16} = 2$; в) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}$;
 б) $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$; г) $\sqrt[4]{-\frac{16}{81}} = -\frac{2}{3}$.

151. Найдите значение корня:

- а) $\sqrt[15]{1}$; г) $\sqrt[7]{-1}$; ж) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; к) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}$.
 б) $\sqrt[3]{125}$; д) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$; з) $\sqrt[3]{-0,027}$;
 в) $\sqrt[4]{625}$; е) $\sqrt[4]{0,0625}$; и) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$;

152. Найдите значение выражения:

- а) $3\sqrt{196}$; в) $0,5\sqrt[4]{10000}$; д) $-3 + 7\sqrt[4]{0,0081}$;
 б) $5\sqrt[3]{1000}$; г) $-0,2\sqrt[4]{81}$; е) $\sqrt[5]{-0,03125} + \sqrt[9]{\frac{1}{512}}$.

153. Найдите значение степени:

- а) $(\sqrt{25})^2$; г) $(\sqrt[7]{-11})^7$; ж) $(-\sqrt[7]{23})^7$; к) $(5\sqrt[4]{11})^4$.
 б) $(\sqrt[3]{36})^3$; д) $(2\sqrt[4]{4})^4$; з) $(-\sqrt[8]{5})^8$;
 в) $(\sqrt[5]{115})^5$; е) $(-3\sqrt[3]{9})^3$; и) $(5\sqrt[3]{-7})^3$;

154. Найдите арифметический корень четвертой степени из числа:

- а) 0; б) 16; в) $\frac{16}{81}$; г) $29\frac{52}{81}$.

155. Вычислите:

- а) $\sqrt[3]{36^3}$; б) $4\sqrt{\left(\frac{1}{25}\right)^2}$; в) $\sqrt[3]{11^6}$; г) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$;
б) $\sqrt[5]{-1024}$; г) $\sqrt[3]{-35^3}$; е) $\sqrt[7]{-8^7}$; з) $\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}$.

156. Найдите, при каких значениях переменной имеет значение выражение:

- а) $\sqrt[6]{y}$; в) $\sqrt[8]{-e}$; д) $\sqrt[11]{\frac{5}{3-y}}$; ж) $\frac{d}{\sqrt[6]{d^2-4}}$;
б) $\sqrt[7]{y}$; г) $\sqrt[10]{x-2}$; е) $\sqrt[14]{\frac{t-2}{t+2}}$; з) $\frac{\sqrt[8]{2f^2-3}}{\sqrt[15]{f^2-25}}$.

157. Что можно сказать о выражении a , учитывая, что:

- а) квадратный корень из выражения a имеет два значения;
б) никакое положительное число не является значением выражения $\sqrt[5]{a}$?

158. Укажите, при каких значениях переменной истинно равенство:

- а) $\sqrt{a^2} = a$; б) $\sqrt[3]{x^3} = x$; в) $\sqrt[5]{b^5} = b$; г) $\sqrt[18]{y^{18}} = y$.

159. Вычислите:

- а) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$; в) $\left(\sqrt{5+\sqrt{23}} + \sqrt{5-\sqrt{23}}\right)^2$;
б) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{6-\sqrt{20}} \cdot \sqrt[3]{-0,001}$.

160. Решите уравнение:

- а) $a^5 = -243$; в) $x^3 = 5$; д) $u^5 = 11$;
б) $x^6 = \frac{1}{64}$; г) $z^4 = 10$; е) $a^{10} = 2048$.

161. Сколько есть натуральных чисел n , удовлетворяющих неравенству:

- а) $2005 < \sqrt{n} < 2006$; б) $2005 < \sqrt[3]{n} < 2006$?

162. Найдите область определения функции:

- а) $y = \sqrt{x-7}$; б) $c = \sqrt[12]{3t^2+5t-2}$; в) $p = \sqrt[9]{c^2+c+1}$.

163. Упростите:

а) $\sqrt{(4-x)^6}$, если $x \leq 4$; если $x > 4$;

б) $\sqrt[3]{(a-3)^3}$, если $a \geq 3$; если $a < 3$.

164. Упростите:

а) $\sqrt[3]{(a-2)^3}$; в) $\sqrt[8]{(2c^2-3c+1)^8}$;

б) $\sqrt[4]{(b+2)^4}$; г) $\sqrt[9]{(2c^3-3c+1)^9}$.

165. Найдите:

а) величину вклада в a р. через n лет, учитывая, что годовая процентная ставка составляет p %;

б) годовую процентную ставку, учитывая, что величина вклада удвоится через 20 лет.

166. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{24-7a} = 3$; б) $\sqrt[4]{4b-3} = -1$; в) $\sqrt{e^2-1} = 4$.

167. Решите уравнение:

а) $\sqrt{(a+5)^2} = -5-a$; в) $\sqrt[6]{(c^2+2c-3)^6} = c^2+2c-3$;

б) $\sqrt[4]{(1-2b)^8} = (1-2b)^2$; г) $\sqrt[8]{(8-4d-d^2)^8} = d^2+4d-8$.

168. а) Упростите выражение $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(4-x)^2}$;

б) постройте график функции $y = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(4-x)^2}$;

в) решите уравнение $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(4-x)^2} = 2$.

169. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{(x-1)^2}$; б) $z = \frac{\sqrt[4]{t^4}}{t}$; в) $A = \sqrt{y^6}$; г) $K = -\sqrt[4]{a^8}$.

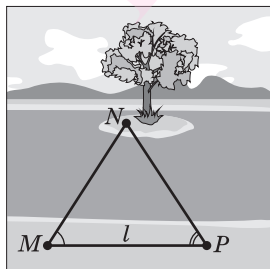


Рис. 50

170. Для определения расстояния от точки M до недоступной точки N выбрали точку P на расстоянии l от точки M и измерили углы α и β , которые составляет прямая MP с прямыми MN и PN (рис. 50). Найдите расстояние MN , учитывая, что:

- а) $l = 30$ м, $\alpha = 80^\circ$ и $\beta = 70^\circ$; в) $l = 58$ м, $\alpha = 56^\circ$ и $\beta = 63^\circ$;
 б) $l = 40$ м, $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 55^\circ$; г) $l = 90$ м, $\alpha = 20^\circ$ и $\beta = 67^\circ$.

171. Докажите, что:

- а) биссектриса угла треугольника делит противоположащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, используя теорему синусов;
 б) если на стороне треугольника выбрать точку, делящую эту сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то отрезок, соединяющий выбранную точку с противоположащей вершиной треугольника, является его биссектрисой.

172. Используя теорему синусов, докажите, что в треугольнике:

- а) против равных сторон лежат равные углы;
 б) против равных углов лежат равные стороны;
 в) против большей стороны лежит больший угол;
 г) против большего угла лежит большая сторона.

173. Углы A и C треугольника ABC равны соответственно α и γ , а углы A и D треугольника ABD — соответственно δ и ε . Найдите отношение $\frac{BC}{BD}$.

174. Две прямые пересекают одну сторону угла A величиной α в точках M и P , другую — в точках N и Q (рис. 51). Углы M и N треугольника AMN , углы P и Q треугольника APQ и отношение $\frac{AP}{AM}$ равны соответственно β , γ , δ , ε , a . Найдите отношения $\frac{AQ}{AN}$ и $\frac{PQ}{MN}$.

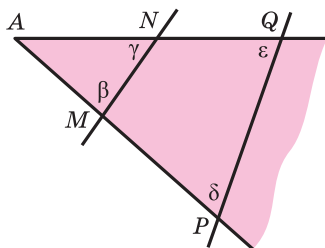


Рис. 51

175. В равносторонний треугольник вписан другой равносторонний треугольник так, что стороны первого треугольника перпендикулярны сторонам второго. Докажите, что отношение сторон вписанного и данного треугольников равно $\frac{1}{3}$.

176. Измерив два угла и две стороны треугольника, получили 32° , 43° , 4 см, 5 см. Определите, какой может быть третья сторона.

177. Один угол параллелограмма равен $21^\circ 36'$, его большая сторона — $3\frac{2}{3}$ дм, меньшая диагональ — 2,2 дм. Найдите:

- меньшую сторону и большую диагональ параллелограмма;
- площадь и высоты параллелограмма;
- углы, образованные меньшей диагональю со сторонами параллелограмма;
- углы, образованные большей диагональю со сторонами параллелограмма.

178. Хорды PQ и RS одной окружности длиной 18 и 24 соответственно пересекаются в точке A . Найдите угол между хордами, учитывая, что точка Q отстоит от точек A и S соответственно на 8 и $8\sqrt{3}$.

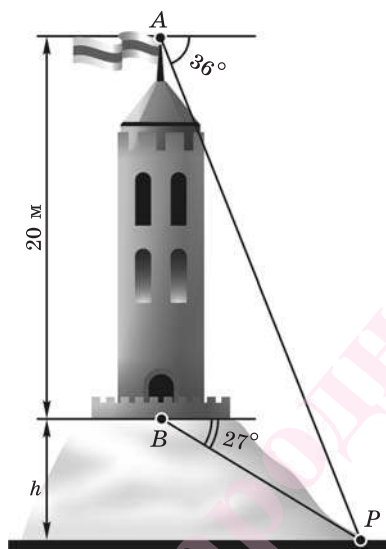


Рис. 52

179. На горе находится вышка высотой 20 м (рис. 52). Некоторый предмет P около горы наблюдают из вершины A вышки и затем от ее основания B , и в результате получают величины 36° и 27° соответственно. Найдите высоту h горы.

180. Ребро QR пирамиды $QRST$ равно 12 и перпендикулярно ее ребрам RS и RT (рис. 53). Найдите полную поверхность пирамиды, учитывая, что ребра ST и QR , а также RS и RT равны друг другу, а угол SQT равен 75° .

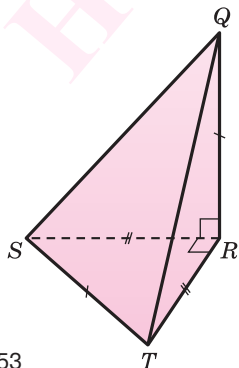


Рис. 53

181. Точки J , B и Q — середины ребра SS_1 и диагоналей S_1T и S_1U соответствующих граней куба $STRUS_1T_1R_1U_1$ (рис. 54). Найдите площадь полной поверхности куба, учитывая, что периметр треугольника JBQ равен $2 + \sqrt{2}$ см.

182. Точки A и B — середины диагоналей GE и HK трапеции $GHEK$, являющейся основанием пирамиды $FGHEK$, а точка Q — середина ребра FH . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки Q , A , B . Какой фигурой является сечение?

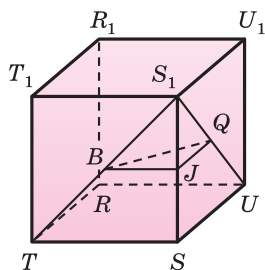


Рис. 54

183. Решите неравенство:

- а) $|z - 2| > 1$; в) $|2v - 3| < 2$; д) $|2q + 3| > |4q - 3|$;
 б) $|2c - 3| < 3$; г) $|b + 2| - |b| > 0$; е) $|2w - 3| - |3w + 7| > 0$.

184. Решите неравенство:

- а) $d^2 - 4d + 6 > 0$; д) $2r^2 - 3r + 7 < 0$;
 б) $e^2 + 6e + 10 < 0$; е) $4s^2 - 8s + 9 > 0$;
 в) $k^2 + k + 2 > 0$; ж) $3c^2 - c < c + 5$;
 г) $m^2 + 3m + 5 < 0$; з) $2n^2 + 9 > n^2 + 6n$.

185. Решите неравенство:

- а) $\left| \frac{e+2}{e-1} \right| \geq 1$; г) $\left| \frac{2u-3}{u^2-1} \right| \geq 2$; ж) $\left| \frac{m^2-3m-1}{m^2+m+1} \right| < 3$;
 б) $\left| \frac{2r-1}{r-1} \right| > 2$; д) $\left| -\frac{5}{t+2} \right| < \left| \frac{10}{t-1} \right|$; з) $|2q + 7| - |3q + 5| > 0$;
 в) $\left| \frac{y^2-1}{y+2} \right| < 1$; е) $\left| \frac{i^2-3i+2}{i^2+3i+2} \right| \geq 1$; и) $|2 - 5s| - |3s + 9| \leq 0$.

* * *

186. Пытаясь предсказать результат заплыва, первый наблюдатель расположил пловцов так: A, B, C, D, E . Оказалось, что он не угадал правильно ни место ни одного из пловцов и ни одной пары пловцов, которые финишировали друг за другом. В прогнозе D, A, E, C, B , сделанном вторым наблюдателем, были правильно угаданы места двух пловцов и две пары пловцов, которые финишировали друг за другом. Определите, в каком порядке финишировали пловцы.

187. Определите, при каких значениях переменной n все вершины правильного n -угольника могут располагаться в узлах квадратной сетки на плоскости.

188. Докажите, что числа вида $\sqrt{2,0...07}$ иррациональны.

4. Свойства арифметического корня

Мы знаем, что квадратный корень имеет такие свойства:

если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;

если $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;

если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то неравенство $a > b$ равносильно неравенству $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Аналогичные свойства имеет корень n -й степени и при $n > 2$.

Теорема 4. При любом натуральном значении n :

а) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, если $a \geq 0$ и $b \geq 0$;

б) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, если $a \geq 0$ и $b > 0$.

Доказательство. Пусть $a \geq 0$ и $b \geq 0$. Докажем, что $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Для этого в соответствии с определением арифметического корня нужно доказать, что:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0 \text{ и } (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab.$$

Поскольку $a \geq 0$, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет значение и это значение неотрицательно. Так же поскольку $b \geq 0$, то выражение $\sqrt[n]{b}$ имеет неотрицательное значение. Поэтому и выражение $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ имеет неотрицательное значение.

Далее по свойству натуральной степени произведения и определению корня получим

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab.$$

Доказательство равенства $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ проводится аналогично.

Следствие 1. При любом нечетном натуральном значении n :

а) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, если a и b — любые числа;

б) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, если a — любое число и $b \neq 0$.

Действительно, если, например, $a \geq 0$ и $b < 0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \stackrel{(1)}{=} -\sqrt[n]{\frac{a}{-b}} \stackrel{(2)}{=} -\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{-b}} \stackrel{(3)}{=} \frac{\sqrt[n]{a}}{-\sqrt[n]{-b}} \stackrel{(4)}{=} \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Здесь использованы (1) и (4) —

следствие 1 из параграфа 3, (2) — теорема 4, (3) — свойство дроби.

Теорема 4 дает **правила извлечения корня из произведения и из дроби**:

чтобы найти корень из произведения, можно найти корни из отдельных множителей и полученные числа перемножить;

чтобы извлечь корень из дроби, можно извлечь его отдельно из числителя и знаменателя и первый результат разделить на второй.

Прочтение тождеств из теоремы 4 справа налево:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

дает **правила умножения и деления корней с одинаковыми показателями**:

чтобы перемножить корни с одинаковыми показателями, можно перемножить их подкоренные выражения и извлечь корень из полученного произведения.

чтобы разделить корни с одинаковыми показателями, можно разделить их подкоренные выражения и извлечь корень из полученного частного.

Пример 1. а) $\sqrt[4]{625 \cdot 10000} = \sqrt[4]{625} \cdot \sqrt[4]{10000} = 5 \cdot 10 = 50;$

б) $\sqrt[3]{8 \cdot (-125) \cdot 27} = -\sqrt[3]{8 \cdot 125 \cdot 27} = -\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{27} = -2 \cdot 5 \cdot 3 = -30;$

в) $\sqrt[4]{2 \frac{113}{256}} = \sqrt[4]{\frac{625}{256}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{256}} = \frac{5}{4} = 1 \frac{1}{4};$

г) $\sqrt[3]{\frac{783}{29}} = \sqrt[3]{\frac{783}{29}} = \sqrt[3]{27} = 3.$

Теорема 5. Если $a \geq 0$, то при любых натуральных значениях n и m истинны равенства $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ и $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.

Доказательство. Пусть $a \geq 0$. Тогда:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{m \text{ множителей}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ множителей}}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Докажем второе тождество. Выражение $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ имеет значение, причем это значение неотрицательно. Поскольку

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^m\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a,$$

то выражение $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ является значением корня степени mn из числа a : $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Следствие 2. Если n и m — нечетные числа, то при любом значении a истинны равенства $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ и $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Действительно, если, например, $a \leq 0$, m и n — нечетные числа, то

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{-\sqrt[m]{-a}} = -\sqrt[n]{\sqrt[m]{-a}} = -\sqrt[mn]{-a} = \sqrt[mn]{a}.$$

Теорема 5 позволяет сформулировать **правило возведения корня в степень и правило извлечения корня из корня**:

чтобы возвести корень в степень, можно возвести в эту степень подкоренное выражение, оставив показатель корня прежним;

чтобы извлечь корень из корня, можно перемножить показатели корней, оставив подкоренное выражение без изменений.

Пример 2. а) $(\sqrt[6]{8})^2 = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{64} = 2$;

б) $(\sqrt[3]{-4})^5 = \sqrt[3]{(-4)^5} = \sqrt[3]{(-2^2)^5} = \sqrt[3]{-(2^2)^5} = \sqrt[3]{-2^{10}} = -\sqrt[3]{2^{10}} = -\sqrt[3]{2^9 \cdot 2} = -8\sqrt[3]{2}$;

в) $\sqrt[5]{\sqrt{3}} = \sqrt[10]{3}$.

Следствие 3. Если $a \geq 0$, то при любых натуральных значениях m , n и k истинно равенство $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Действительно:

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{km}}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{(a^m)^k}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Доказанное утверждение выражает **основное свойство корня**:

если показатель корня и показатель подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится.

Пример 3. а) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^2 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^3}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt{3}$;

б) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{9^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 9^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 3^4} = \sqrt[6]{3^7} = \sqrt[6]{3^6 \cdot 3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}$.

Можно доказать, что если m , n и k — нечетные числа, то при всех значениях a истинно равенство $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Теорема 6. Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то неравенство $a > b$ равносильно неравенству $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ при любом натуральном значении n .

Доказательство. Пусть $a \geq 0$ и $b \geq 0$. Тогда выражения $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[n]{b}$ имеют значения при любом значении n .

Пусть $a > b$. Допустим, что $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$. Возведя обе части этого неравенства с неотрицательными компонентами в n -ю степень, получим $a < b$. Но это противоречит условию $a > b$.

Пусть $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$. Возведя обе части этого неравенства с неотрицательными компонентами в n -ю степень, получим $a > b$.

Следствие 4. Если n — нечетное число, то неравенство $a > b$ равносильно неравенству $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ при любых значениях a и b .

Действительно, если $a < 0$ и $b < 0$, то $-a > 0$ и $-b > 0$. Неравенство $-a < -b$ по уже доказанному равносильно неравенству $\sqrt[n]{-a} < \sqrt[n]{-b}$, или неравенству $-\sqrt[n]{a} < -\sqrt[n]{b}$, или неравенству $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$. Получили, что если $a < 0$ и $b < 0$, то неравенство $a > b$ равносильно неравенству $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

Равносильность неравенств в случаях, когда числа a и b имеют разные знаки и когда одно из чисел равно нулю, устанавливается аналогично.

- ?
1. Сформулируйте правила извлечения корня из произведения для неотрицательных подкоренных выражений; для нечетного показателя корня.
 2. Сформулируйте правила извлечения корня из дроби для неотрицательных подкоренных выражений; для нечетного показателя корня.
 3. Сформулируйте правила умножения корней с одинаковыми показателями для неотрицательных подкоренных выражений; для нечетного показателя корня.
 4. Сформулируйте правила возведения корня в степень для неотрицательных подкоренных выражений; для нечетного показателя корня.
 5. Сформулируйте правила извлечения корня из корня для неотрицательных подкоренных выражений; для нечетного показателя корня.
 6. Сформулируйте основное свойство корня.
 7. Сформулируйте теорему, связывающую неравенства $a > b$ и $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ для неотрицательных подкоренных выражений; для нечетного показателя корня.

189. Найдите значение выражения:

- а) $\sqrt[3]{27 \cdot 125}$; в) $\sqrt[4]{16 \cdot 81}$; д) $\sqrt[3]{0,001 \cdot 343}$;
б) $\sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4}$; г) $\sqrt[3]{2^{12} \cdot 3^6}$; е) $\sqrt[3]{9 \cdot 24}$.

190. Найдите значение выражения:

- а) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$; г) $\sqrt[5]{5^2 \cdot 7^3} \cdot \sqrt[5]{5^3 \cdot 7^2}$;
б) $\sqrt[3]{121} \cdot \sqrt[3]{11}$; д) $\sqrt[3]{12 - \sqrt{19}} \cdot \sqrt[3]{12 + \sqrt{19}}$;
в) $\sqrt[4]{2 \cdot 49} \cdot \sqrt[4]{8 \cdot 49}$; е) $\sqrt[4]{10 + \sqrt{19}} \cdot \sqrt[4]{10 - \sqrt{19}}$.

191. Вычислите:

- а) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$; б) $\sqrt[3]{\frac{3^6}{5^3}}$; в) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$; г) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$.

192. Найдите значение выражения:

- а) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$; в) $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{48}}$; г) $\frac{\sqrt[6]{6}}{\sqrt[6]{6000000}}$.

193. Установите, во сколько раз значение выражения:

- а) $\sqrt{63}$ больше значения выражения $\sqrt{7}$;
б) $\sqrt[3]{\frac{7}{216}}$ меньше значения выражения $\sqrt[3]{\frac{7}{64}}$.

194. Найдите значение выражения:

- а) $\sqrt{197^2 - 28^2}$; г) $\sqrt[3]{234^2 - 109^2}$;
б) $\sqrt{173^2 - 52^2}$; д) $\sqrt[6]{8177^2 - 7448^2}$;
в) $\sqrt[4]{440,5^2 - 184,5^2}$; е) $\sqrt[5]{23\,344^2 - 23\,312^2}$.

195. Найдите катет прямоугольного треугольника, у которого второй катет и гипотенуза соответственно равны:

- а) 391 и 409; в) 441 и 1512;
б) 312 и 480; г) 1197 и 1995.

196. Вычислите:

- а) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{2\frac{1}{4}}$; б) $\sqrt[4]{15\frac{5}{8}} : \sqrt[4]{\frac{2}{5}}$; в) $\frac{\sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}}$; г) $(\sqrt[3]{\sqrt{27}})^2$.

197. Вычислите:

- а) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[6]{27^2} - \sqrt[3]{64}$; в) $\sqrt[3]{11 - \sqrt{57}} \cdot \sqrt[3]{11 + \sqrt{57}}$;
б) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} + \sqrt[4]{18} \sqrt[4]{4\frac{1}{2}} - \sqrt{\sqrt{256}}$; г) $\sqrt[4]{17 - \sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{17 + \sqrt{33}}$.

198. Вычислите:

- а) $\sqrt[3]{0,125 \cdot 216}$; в) $\sqrt[5]{\frac{1}{243} \cdot 32}$; д) $\sqrt[7]{\frac{1}{128} \cdot 2187}$;
б) $\sqrt[3]{686 \cdot 4}$; г) $\sqrt[4]{0,0032 \cdot 1024}$; е) $\sqrt[4]{1,5 \cdot 3\frac{3}{8}}$.

199. Вычислите:

- а) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$; в) $\sqrt[4]{324} : \sqrt[4]{4}$; д) $(\sqrt{20} - \sqrt{45}) : \sqrt{5}$;
б) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; г) $\sqrt[3]{\frac{16}{2}}$; е) $(\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{5}) : \sqrt[3]{5}$.

200. Установите, при каких значениях переменной истинно равенство:

- а) $\sqrt{a^2 - 4} = \sqrt{a - 2} \cdot \sqrt{a + 2}$;
б) $\sqrt[4]{(b - 3)(7 - b)} = \sqrt[4]{b - 3} \cdot \sqrt[4]{7 - b}$;
в) $\sqrt[3]{(c + 2)(c - 4)} = \sqrt[3]{c + 2} \cdot \sqrt[3]{c - 4}$;
г) $\sqrt[6]{d(d + 2)(d + 4)} = \sqrt[6]{d} \cdot \sqrt[6]{d + 2} \cdot \sqrt[6]{d + 4}$;
д) $\sqrt[8]{(x - l)^3} = (\sqrt[8]{x - l})^3$;
е) $\sqrt[9]{(y - 7)^4} = (\sqrt[9]{y - 7})^4$.

201. Упростите:

- а) $\sqrt{25a^2}$; в) $\sqrt[5]{32x^{15}}$; д) $\sqrt[3]{2xy} \cdot \sqrt[3]{4x^2y} \cdot \sqrt[3]{27y}$;
б) $\sqrt[4]{81c^8}$; г) $\sqrt[3]{82^{12}}$; е) $\frac{\sqrt[5]{k^3l^2} \cdot \sqrt[5]{3k^2l^3}}{\sqrt[5]{3kl}}$.

202. Представьте дробью выражение:

- а) $\sqrt{\frac{3}{49}}$; б) $\sqrt[3]{5\frac{2}{5}}$; в) $\sqrt{\frac{b^6}{5}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{8}{d^{16}}}$.

203. Упростите:

- а) $\sqrt[5]{x^6y^7} : \sqrt[5]{xy^2}$; в) $\sqrt[3]{\frac{3c}{d^2}} : \sqrt[3]{\frac{d}{9c^2}}$;
б) $\sqrt[3]{81a^4b} : \sqrt[3]{3ab}$; г) $\sqrt[4]{\frac{2e}{f^3}} : \sqrt[4]{\frac{f}{8e^3}}$.

204. Упростите:

- а) $10\sqrt{3^5}$; в) $12\sqrt{(-5)^4}$; д) $\sqrt[6]{\frac{8}{125}}$; ж) $16\sqrt[16]{\left(-\frac{81}{256}\right)^4}$;
б) $12\sqrt[12]{5^4}$; г) $\sqrt[8]{x^4}$; е) $\sqrt[2]{2\frac{113}{256}}$; з) $15\sqrt[15]{\left(-\frac{81}{343}\right)^5}$.

205. Упростите:

а) $\sqrt[6]{(\sqrt{7}-2)^3}$; в) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^2}$; д) $\sqrt[8]{(\sqrt{5}-2)^4}$;
б) $\sqrt[10]{(\sqrt{3}-4)^2}$; г) $\sqrt[9]{(\sqrt{3}-\sqrt{4})^3}$; е) $\sqrt[6]{(1-\sqrt{3})^2}$.

206. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{3^3 \cdot 5^3}$; г) $\sqrt[3]{20} \cdot \sqrt[3]{50}$; ж) $\sqrt[3]{4^{27} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{18}}$;
б) $\sqrt[4]{7^4 \cdot 11^4}$; д) $\sqrt[7]{\frac{1}{3^7} \cdot 17^7}$; з) $\sqrt[4]{\frac{1}{3^8} \cdot 3^{12}}$.
в) $\sqrt[4]{8 \cdot 162}$; е) $\sqrt[3]{0,04} \cdot \sqrt[3]{0,2}$;

207. Упростите:

а) $\sqrt[3]{7}$; б) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{10}}$; в) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{8}}$; г) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{625}}$; д) $\sqrt[3]{-3}$.

208. Упростите:

а) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^4}$; б) $\sqrt[3]{c^4} : \sqrt[3]{c^2}$; в) $\sqrt[5]{e^2} \cdot \sqrt[15]{e^4}$; г) $\sqrt[12]{g^5} : \sqrt[4]{g}$.

209. Упростите:

а) $\sqrt{((a-1)(a+1))^4}$; г) $\sqrt[4]{((e-1)(e+1))^{12}}$;
б) $\sqrt[12]{(b^2-b+1)^6}$; д) $\sqrt[3]{(-d^2+d-1)^6}$;
в) $\sqrt[3]{((c-1)(c+1))^6}$; е) $\sqrt[8]{(f^2-5f+6)^4}$.

210. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{\sqrt{3}}$; в) $\sqrt[8]{\sqrt[4]{12}}$; д) $\sqrt[5]{4\sqrt{64}}$;
б) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{6}}$; г) $\sqrt{a}\sqrt{a}$; е) $\sqrt[3]{b}\sqrt{b}$.

211. Выполните действия:

а) $\sqrt[4]{7^2}$; в) $\sqrt[3]{7\sqrt{7}}$; д) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$;
б) $\sqrt[12]{36^3}$; г) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{6}}$; е) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}}$.

212. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{a}\sqrt{a}$; б) $a\sqrt{4a} \cdot \sqrt[4]{4a} \cdot \sqrt[8]{4a^3}$.

213. Найдите значение выражения:

- а) $\sqrt[3]{8 - \sqrt{37}} \cdot \sqrt[3]{8 + \sqrt{37}}$; в) $\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{6 + 4\sqrt{2}}$;
б) $\sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$; г) $\sqrt[6]{3 - 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$.

214. Упростите выражение:

- а) $\sqrt[3]{64a^3b^6}$; в) $\sqrt[3]{2kl^2} \cdot \sqrt[3]{4k^2l}$;
б) $\sqrt[5]{32c^{10}d^{20}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{sf}{r}} \cdot \sqrt[4]{\frac{s^3r}{f}}$.

215. Вычислите:

- а) $(\sqrt[6]{7^3})^2$; б) $(\sqrt[10]{32})^2$; в) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$; г) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[9]{3^7}$.

216. Упростите:

- а) $\sqrt[3]{\frac{xy^2}{z}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^5y}{z^2}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{k^2l^2m} \cdot \sqrt[4]{k^3l^3m^2}}{\sqrt[4]{klm^3}}$; в) $(\sqrt[5]{s^3})^5 \cdot (\sqrt[3]{t^2})^3$.

217. Упростите:

- а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{c^{18}}} + (\sqrt[3]{\sqrt[3]{c^4}})^3$; в) $(\sqrt[4]{\sqrt[4]{n^8m^2}})^4 - (\sqrt[4]{n^2m^8})^2$;
б) $2\sqrt{\sqrt{s^4t^8}} - (\sqrt[3]{\sqrt{s^3t^6}})^2$; г) $\sqrt{(2,07)^{-9}} : \sqrt{(5,75)^{-9}}$.

218. Докажите:

- а) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 2$; б) $\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} = -2$.

219. С помощью калькулятора с точностью до тысячной найдите значение выражения:

- а) $\sqrt{24}$; г) $\sqrt[4]{1,62}$;
б) $\sqrt[4]{24}$; д) $\sqrt[4]{5,128}$;
в) $\sqrt{1,62}$; е) $\sqrt[8]{5,128}$.

220. С точностью до десятичной с помощью калькулятора найдите значение выражения:

- а) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{15} : \sqrt{5}$;
б) $\sqrt{6,8} \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{0,38}$;
в) $\sqrt{(1,35)^{-7}} \cdot \sqrt{(0,45)^{-7}}$.

221. Сравните значения выражений:

- а) $\sqrt[6]{5}$ и $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt{3}$ и $\sqrt[6]{8}$; в) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{2\sqrt{3}}$.

222. Сравните с нулем значение выражения:

- а) $\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}$; в) $\sqrt[4]{4} - \sqrt[5]{5}$;
б) $\sqrt[10]{10} - \sqrt[11]{11}$; г) $\sqrt[20]{20} - \sqrt[21]{21}$.

223. Упростите:

- а) $\frac{\sqrt{q} - \sqrt{p}}{\sqrt[4]{q} - \sqrt[4]{p}} - \frac{\sqrt{q} + \sqrt[4]{qp}}{\sqrt[4]{q} + \sqrt[4]{p}}$;
б) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n}} - \frac{1}{\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n}} \right) \cdot (\sqrt{m} - \sqrt{n})$;
в) $\frac{e-f}{\sqrt[3]{e} - \sqrt[3]{f}} - \frac{e+f}{\sqrt[3]{e} + \sqrt[3]{f}}$;
г) $\left(\frac{x+y}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} - \sqrt[3]{xy} \right) : (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^2$.
-

224. Определите знак выражения:

- а) $\sin(-201^\circ) \cdot \sin 299^\circ$; в) $\cos(-43^\circ) \cdot \sin 121^\circ \cdot \operatorname{tg}(-149^\circ)$;
б) $\operatorname{tg} 145^\circ \cdot \operatorname{ctg}(-297^\circ)$; г) $\sin(-196^\circ) \cdot \cos(-916^\circ) \cdot \operatorname{ctg} 1276^\circ$.

225. Есть выражения $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$. Найдите значения тех из них, которые не известны, учитывая, что:

- а) $\operatorname{ctg} x = -\frac{8}{15}$ и $\frac{\pi}{2} < x < \pi$; г) $\cos x = -\frac{99}{101}$ и $0 < x < \pi$;
б) $\sin x = -\frac{48}{73}$ и $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$; д) $\operatorname{tg} x = \frac{60}{91}$ и $0 < x < \frac{\pi}{2}$;
в) $\cos x = -\frac{77}{85}$ и $\pi < x < 2\pi$; е) $\operatorname{ctg} x = \frac{112}{15}$ и $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

226. Представьте произведением выражение:

- а) $\operatorname{tg}\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)$; г) $\operatorname{ctg} 8^\circ - \operatorname{ctg} 49^\circ$;
б) $\operatorname{ctg} 112^\circ + \operatorname{ctg} 7^\circ$; д) $\operatorname{tg}^2 15^\circ - \operatorname{ctg}^2 z$;
в) $\operatorname{ctg}^2 g - \operatorname{ctg}^2 h$; е) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y$.

227. Проводятся различные прямые, отсекающие от данного угла треугольники с данной площадью. Какой из этих треугольников имеет меньшую сторону, заключенную между сторонами угла?

228. Углы CQD и EQD , а также QDC и QDE пирамиды $QCDE$ равны друг другу (рис. 55). Определите:

- а) сколько граней пирамиды являются равнобедренными треугольниками;

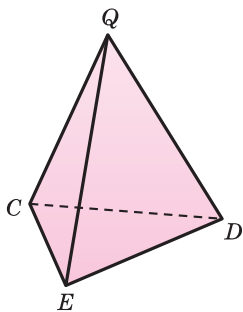


Рис. 55

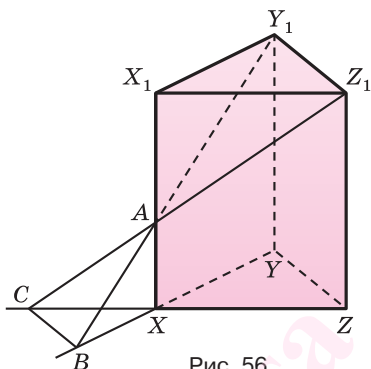


Рис. 56

б) полную поверхность пирамиды, учитывая, что $QD = 60$, $\angle CQD = 45^\circ$, $\angle QDC = 75^\circ$, $\angle DCE = 60^\circ$.

229. На ребрах MM_1 и MP призмы $MNOPM_1N_1O_1P_1$ выбраны точки A и B . Постройте:

- а) точку, в которой прямая AB пересекает плоскость $M_1N_1O_1$;
- б) прямую, по которой плоскость ABN_1 пересекает плоскость $M_1N_1O_1$.

230. Постройте сечение пирамиды $QXYZ$, все ребра которой равны l , плоскостью, проходящей через середины ребер XY , QZ и параллельной ребру QY . Найдите периметр сечения.

231. Есть правильная треугольная призма $XYZX_1Y_1Z_1$, на ребре XX_1 которой выбрана такая точка A , что $XA : AX_1 = 2 : 3$ (рис. 56). Через эту точку и вершины Y_1 , Z_1 проведены прямые, пересекающие плоскость основания в точках B и C соответственно. Найдите отрезок BC , учитывая, что $XY = 36$ мм.

232. Произведение диагоналей ромба, являющегося основанием прямого параллелепипеда, равно 192 см^2 , радиус вписанной в него окружности — $4,8$ см, а диагональ боковой грани — 26 см. Найдите полную поверхность параллелепипеда.

233. Найдите полную поверхность прямоугольного параллелепипеда, учитывая, что диагонали его граней равны 5 см, $\sqrt{41}$ см и $\sqrt{34}$ см.

* * *

234. Действительные числа a и b удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + ab + \sqrt{3}(a + b) = 0$. Докажите, что $a^2 + b^2 \leq 3$.

235. Точки A_1 и C_2 , B_1 и A_2 , C_1 и B_2 выбраны соответственно на сторонах AC , AB и BC треугольника ABC так, что $A_1A_2 \parallel BC$, $B_1B_2 \parallel AC$, $C_1C_2 \parallel AB$ и отрезки A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 пересекаются в центре окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите значение выражения $\frac{A_1A_2}{BC} + \frac{B_1B_2}{AC} + \frac{C_1C_2}{AB}$.

236. По кругу записано 2008 целых чисел так, что из любых пяти чисел, идущих подряд, можно выбрать три числа, сумма которых в два раза больше суммы двух остальных чисел из этих пяти. Докажите, что все записанные числа — нули.

5. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Пример 1. Рассмотрим квадрат со стороной 1 (рис. 57). Если середины его противоположных сторон соединить отрезком, то возникнут два прямоугольника с площадью $\frac{1}{2}$. Если теперь середины одного из полученных прямоугольников соединить отрезком, то получится два прямоугольника с площадью $\frac{1}{4}$. Снова повторив такое действие, получим два прямоугольника с площадью $\frac{1}{8}$. Будем продолжать этот процесс далее. В результате получим бесконечную убывающую последовательность

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$$

у которой каждый следующий член получается из предыдущего умножением на $\frac{1}{2}$. Естественно считать, что сумма

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

равна 1, так как она представляет площадь всего данного квадрата.

Записанная сумма содержит бесконечно много слагаемых. Рассмотрим ее часть S_n из n слагаемых:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

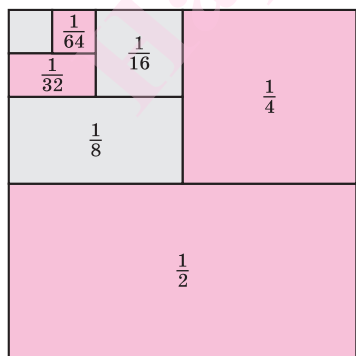


Рис. 57

Ее компоненты образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{2}$. Поэтому

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

С возрастанием значения переменной n значение выражения $\frac{1}{2^n}$ становится все меньше и меньше: значение переменной n всегда можно подобрать так, что значение выражения $\frac{1}{2^n}$ станет меньше любого малого заранее выбранного числа. Поэтому бесконечную сумму $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$ считают равной 1.

Рассмотрим теперь бесконечную геометрическую прогрессию

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots, a_1q^{n-1}, \dots,$$

где $|q| < 1$. Для таких прогрессий истинно условие $|a_1q^k| > |a_1q^{k+1}|$, их называют **бесконечно убывающими геометрическими прогрессиями**.

Суммой членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии (a_n) со знаменателем q называется число $S = \frac{a_1}{1-q}$.

Это определение объясняется тем, что с увеличением n число S все меньше отличается от суммы первых n членов этой прогрессии. Действительно,

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1}{1 - q} q^n.$$

Поскольку $|q| < 1$, то q^n с увеличением n приближается к нулю, а значит, приближается к нулю и вычитаемое $\frac{a_1}{1-q} q^n$. Поэтому сумма S_n приближается к $\frac{a_1}{1-q}$.

Пример 2. Найдём значение суммы $343 - 147 + 63 - 27 + \frac{81}{7} - \dots$.

Замечаем, что слагаемые этой алгебраической суммы являются членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $a_1 = 343$ и $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-147}{343} = -\frac{3}{7}$. Поэтому

$$S = \frac{343}{1 - \left(-\frac{3}{7}\right)} = \frac{343}{\frac{10}{7}} = 240,1.$$

Мы знаем, что любое рациональное число можно представить десятичной дробью. При этом если разложение на простые множители знаменателя несократимой дроби, представляющей данное рациональное число, содержит только двойки и пятерки, то получается конечная десятичная дробь, а если это разложение содержит хотя бы один простой множитель, отличный от 2 и 5, то получается бесконечная периодическая десятичная дробь. Например:

$$\frac{37}{80} = \frac{37}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{37 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{37 \cdot 125}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{4625}{10000} = 0,4625;$$

$$\frac{37}{41} = 0,(90243); \quad \frac{37}{328} = 0,112(80487).$$

Повторяющаяся группа цифр называется **периодом** десятичной дроби, группа цифр между целой частью и периодом называется **предпериодом**. В записи 0,112(80487) предпериод равен 112, а период — 80 487.

Обыкновенную дробь можно преобразовать в десятичную делением ее числителя на знаменатель. Установим алгоритмы преобразования бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную.

В дальнейшем мы будем пользоваться записью вида $\overline{b_s \dots b_2 b_1, a_1 a_2 \dots a_k}$. Она обозначает десятичную дробь, целая часть которой записана с помощью цифр $b_1, b_2, \dots, b_s$, а дробная — с помощью цифр $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Теорема 7. *Бесконечная периодическая десятичная дробь без предпериода равна обыкновенной дроби, числитель которой есть число, записанное цифрами периода, а знаменатель — число, записанное столько же девятками, сколько есть цифр в периоде.*

▲ **Доказательство.** Пусть $0, (\overline{a_1 a_2 \dots a_k})$ — периодическая десятичная дробь, где $a_1, a_2, \dots, a_k$ — цифры периода. Тогда число $0, (\overline{a_1 a_2 \dots a_k})$ можно представить бесконечной суммой:

$$0, (\overline{a_1 a_2 \dots a_k}) = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}} + \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{100 \dots 0}_{2k \text{ нулей}}} + \dots + \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{100 \dots 0}_{nk \text{ нулей}}} + \dots,$$

в которой каждое слагаемое получается из предыдущего умножением на $\frac{1}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}}$. Это означает, что бесконечную перио-

дическую дробь можно рассматривать как сумму S членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}}$ и знаменателем $\frac{1}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}}$. Поэтому

$$S = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}} : \left(1 - \frac{1}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}} \right) =$$

$$= \left(\frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}} \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}} \right) : \left(\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}} - 1 \right) = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ девяток}}}.$$

Теорема 7 обосновывает алгоритм представления обыкновенной дробью бесконечной периодической десятичной дроби без предпериода, который изображен схемой, приведенной на рисунке 58.

Пример 3. Представим обыкновенную дробью десятичную дробь $0,(9504)$. Имеем:

$$0,(9504) = \frac{9504}{9999} = \frac{1056}{1111} = \frac{96}{101}.$$

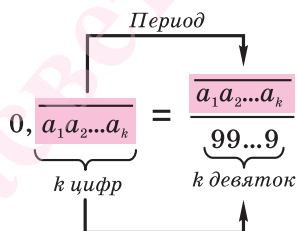


Рис. 58

Теорема 8. *Бесконечная десятичная периодическая дробь с предпериодом равна обыкновенной дроби, числитель которой равен разности между числом, записанным цифрами от десятичной запятой до конца первого периода, и числом, записанным цифрами предпериода, а знаменатель — числу, записанному столькоими девятками, сколько есть цифр в периоде, и столькоими нулями, сколько есть цифр в предпериоде.*

▲ **Доказательство.** Пусть $0, \overline{a_1 a_2 \dots a_k (a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+s})}$ — периодическая десятичная дробь, где $a_1, a_2, \dots, a_k$ — цифры предпериода, $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+s}$ — цифры периода. Тогда число $0, \overline{a_1 a_2 \dots a_k (a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+s})}$ можно представить суммой

$$0, \overline{a_1 a_2 \dots a_k (a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+s})} =$$

$$= 0, \overline{a_1 a_2 \dots a_k} + 0, \overline{\underbrace{00 \dots 0}_{k \text{ нулей}} (a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+s})}$$

или, с учетом теоремы 7, суммой

$$\frac{\overbrace{a_1 a_2 \dots a_k}^{k \text{ нулей}}}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}} + \frac{1}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}} \cdot \frac{\overbrace{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+s}}^{s \text{ нулей}}}{\underbrace{100 \dots 0 - 1}_{s \text{ нулей}}}.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{\overbrace{a_1 a_2 \dots a_k}^{k \text{ нулей}}}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}} + \frac{1}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}} \cdot \frac{\overbrace{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+s}}^{s \text{ нулей}}}{\underbrace{100 \dots 0 - 1}_{s \text{ нулей}}} = \\ &= \frac{\overbrace{a_1 a_2 \dots a_k}^{k \text{ нулей}} \cdot \left(\overbrace{100 \dots 0 - 1}^{s \text{ нулей}} \right) + \overbrace{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+s}}^{s \text{ нулей}}}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}} \cdot \left(\underbrace{100 \dots 0}_{s \text{ нулей}} - 1 \right)} = \\ &= \frac{\overbrace{a_1 a_2 \dots a_k}^{k \text{ нулей}} \cdot \overbrace{100 \dots 0}^{s \text{ нулей}} - \overbrace{a_1 a_2 \dots a_k}^{k \text{ нулей}} + \overbrace{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+s}}^{s \text{ нулей}}}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}} \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{s \text{ девяток}}} = \\ &= \frac{\overbrace{a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+s}}^{s \text{ девяток } k \text{ нулей}} - \overbrace{a_1 a_2 \dots a_k}^{k \text{ нулей}}}{\underbrace{99 \dots 900 \dots 0}_{s \text{ девяток } k \text{ нулей}}}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Теорема 8 обосновывает алгоритм представления обыкновенной дробью бесконечной периодической десятичной дроби с предпериодом, который отражен на схеме, представленной на рисунке 59.

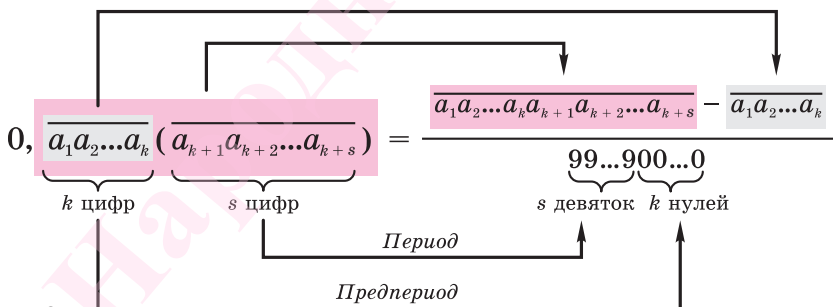


Рис. 59

Пример 4. Представим обыкновенную дробь десятичную дробь 0,3213(513). Имеем:

$$0,3213(513) = \frac{3213513 - 3213}{9990000} = \frac{3210300}{9990000} = \frac{32103}{99900} = \frac{3567}{11100} = \frac{1189}{3700}.$$

1. Что происходит со значением выражения r^n , где $|r| < 1$, если значение переменной n неограниченно увеличивается?
2. Какое число называют суммой членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии?

3. Какое рациональное число можно представить конечной десятичной дробью?
4. Какое рациональное число представляется бесконечной периодической десятичной дробью?
5. Что называют периодом бесконечной периодической десятичной дроби; предпериодом бесконечной периодической десятичной дроби?
6. Как конечную десятичную дробь преобразовать в обыкновенную?
7. Как бесконечную периодическую десятичную дробь без предпериода преобразовать в обыкновенную дробь?
8. Как бесконечную периодическую десятичную дробь с предпериодом преобразовать в обыкновенную дробь?

237. Докажите, что бесконечно убывающей геометрической прогрессией является бесконечная последовательность:

- а) $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$; в) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$;
 б) $-81, -27, -9, -1, \dots$; г) $-16, 8, -4, 2, \dots$.

238. Установите, является ли бесконечно убывающей геометрической прогрессией бесконечная геометрическая прогрессия, для которой:

- а) $a_1 = 40, a_2 = -10$; в) $u_7 = 12, u_{11} = \frac{3}{4}$;
 б) $b_6 = 18, b_7 = 36$; г) $v_5 = -9, v_9 = -\frac{1}{27}$.

239. Установите, является ли бесконечно убывающей геометрической прогрессией бесконечная последовательность, для которой:

- а) $t_n = 3 \cdot (-2)^n$; в) $y_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$;
 б) $x_n = -3 \cdot 4^n$; г) $z_n = 7 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1}$.

240. Докажите, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей, учитывая, что:

- а) $b_2 = -81, S_2 = 162$; в) $v_1 + v_3 = 130, v_1 - v_3 = 120$;
 б) $y_2 = 33, S_2 = 67$; г) $z_2 + z_4 = 68, z_2 - z_4 = 60$.

241. Найдите сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, для которой:

- а) $a_1 = \frac{1}{8}, q = \frac{1}{2}$; в) $u_1 = 9, q = -\frac{1}{3}$;
 б) $b_5 = \frac{1}{81}, q = \frac{1}{3}$; г) $v_4 = -\frac{1}{8}, q = -\frac{1}{2}$.

242. Найдите сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

- а) $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$; г) $-6, 1, -\frac{1}{6}, \frac{1}{36}, \dots$;
б) $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$; д) $-25, -5, -1, \dots$;
в) $6, 1, \frac{1}{6}, \frac{1}{36}, \dots$; е) $-49, 7, -1, \dots$.

243. Найдите сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

- а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$; в) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}, 1, \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}, \dots$;
б) $3, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \dots$; г) $1, x, x^2, x^3, \dots$, если $|x| < 1$.

244. Найдите сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, для которой:

- а) $u_5 = \frac{\sqrt{2}}{16}, q = \frac{1}{2}$; в) $l_3 = -9, q = -\frac{1}{3}$;
б) $v_4 = \frac{1}{81}, q = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $r_4 = -\frac{1}{8}, q = -\frac{1}{2}$.

245. Есть правильный треугольник со стороной a . В него соединением середин сторон вписывается треугольник, в который тем же способом вписывается новый треугольник, и так далее до бесконечности. Найдите:

- а) сумму периметров этих треугольников;
б) сумму площадей этих треугольников.

246. Есть квадрат со стороной l . В него соединением середин сторон вписан квадрат, в который таким же способом вписан новый квадрат, и так далее до бесконечности. Найдите:

- а) сумму периметров этих квадратов;
б) сумму площадей этих квадратов.

247. На кубе со стороной a стоит куб со стороной $\frac{a}{2}$, на котором стоит куб со стороной $\frac{a}{4}$, и т. д. Ребро каждого следующего куба в два раза короче ребра предыдущего куба. В результате получается ступенчатая фигура (рис. 60). Найдите:

- а) высоту этой фигуры;
 б) площадь задней боковой грани этой фигуры;
 в) объем этой фигуры.

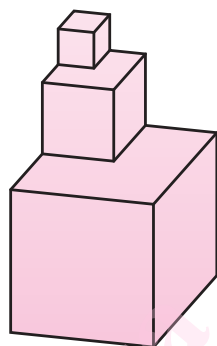


Рис. 60

248. В угол, равный 60° , последовательно вписаны окружности, которые касаются друг друга (рис. 61). Радиус R_1 самой большой окружности равен r . Найдите радиусы $R_2, R_3, \dots, R_n, \dots$ следующих окружностей. Докажите, что сумма $R_1 + 2(R_2 + R_3 + \dots + R_n + \dots)$ равна расстоянию от центра первой окружности до вершины угла.

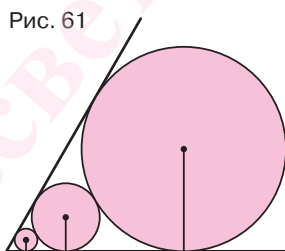


Рис. 61

249. Найдите, при каких значениях переменной x прогрессия $\frac{a+x}{a-x}, \frac{a-x}{a+x}, \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3, \dots$ является бесконечно убывающей, и найдите сумму ее членов.

250. Постройте график функции

$$y = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$$

251. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 150. Найдите:

- а) u_1 , учитывая, что $q = \frac{1}{3}$; б) q , учитывая, что $t_1 = 75$.

252. Составьте такую бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, чтобы сумма ее членов была равной $\frac{25}{4}$, а сумма квадратов ее членов равна $\frac{625}{24}$.

253. Установите, можно ли из чисел $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ выбрать такие числа, которые образуют бесконечную геометрическую прогрессию с суммой членов, равной:

- а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{7}$.

254. Найдите первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, учитывая, что сумма:

- а) членов прогрессии равна 4, а ее знаменатель равен $\frac{1}{2}$;

- б) членов прогрессии равна $2(\sqrt{2} + 1)$, а ее знаменатель — $\frac{1}{\sqrt{2}}$;
в) пяти первых членов равна $\frac{11}{8}$, а сумма членов прогрессии — $\frac{4}{3}$.

255. Найдите сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

- а) $1 + \sin 30^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^3 30^\circ + \dots$;
б) $1 - \cos 30^\circ + \cos^2 30^\circ - \cos^3 30^\circ + \dots$.

256. С использованием суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии запишите периодическую дробь без предпериода:

- а) 0,(2); в) 1,(3); д) 1,(27); ж) 3,(342);
б) 2,(7); г) 2,(21); е) 0,(19); з) 0,(901).

Найдите эту сумму.

257. С использованием суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии запишите периодическую дробь с предпериодом:

- а) 0,2(3); г) 3,7(288); ж) 1,06(32);
б) 1,0(7); д) 3,20(3); з) 0,00(819);
в) 2,3(24); е) 2,15(30); и) 0,111(2).

Найдите эту сумму.

258. Представьте десятичной дробью рациональное число:

- а) $\frac{9}{11}$; в) $-\frac{13}{37}$; д) $4\frac{6}{41}$;
б) $\frac{9}{44}$; г) $-\frac{13}{74}$; е) $4\frac{6}{123}$.

259. Найдите представление бесконечной периодической десятичной дробью рационального числа с числителем 47 и знаменателем:

- а) 37; б) 41; в) 73; г) 111; д) 185.

260. Найдите представление бесконечной периодической десятичной дробью рационального числа со знаменателем 72 и числителем:

- а) 19; б) 11; в) 161; г) 271; д) 7.

261. Обыкновенной дробью представьте рациональное число:

- а) $0,(36)$; в) $3,(234)$; д) $-6,(7361)$;
б) $0,(81)$; г) $4,(93)$; е) $0,(923076)$.

262. Обыкновенной дробью представьте рациональное число:

- а) $0,3(36)$; в) $3,144(234)$; д) $-6,54(7361)$;
б) $0,27(81)$; г) $4,111(93)$; е) $0,0102(923076)$.

263. Через вершину прямого угла Z прямоугольного треугольника XYZ проведена плоскость α , параллельная гипотенузе XY . Биссектриса угла X пересекает плоскость α в точке Q . Найдите длину отрезка ZQ , учитывая, что $XY = 5$ см, $YZ = 4$ см.

264. Точки A и B — соответственно середины ребер NK и ML пирамиды $MNKL$, все ребра которой равны друг другу. Найдите отрезок, по которому пересекаются сечения пирамиды плоскостями, проходящими через прямые MA и KB и параллельные прямой NL , учитывая, что $NK = 60$ см.

265. Есть треугольная пирамида $PABC$, все ребра которой равны 1. Начертите плоскость перпендикуляров к прямой:

- а) PQ в точке Q основания пирамиды;
б) PQ в точке P ;
в) CB в середине K ребра CB ;
г) AC в точке Q ;
д) PA в точке P .

266. Точка K — середина ребра KM треугольной пирамиды $QKLM$, все ребра которой равны 10. Начертите сечение пирамиды и найдите его площадь, учитывая, что плоскость сечения перпендикулярна прямой:

- а) QL и проходит через точку K ;
б) QK и проходит через точку L ;
в) LM и проходит через точку K .

267. С двух участков вместе собрали 2337 ц зерна. Оказалось, что урожайность на первом участке составила 27 ц/га, на втором — 30 ц/га, а урожай на втором участке был на 1203 ц больше, чем на первом. Найдите площади участков.

268. Когда собрали урожай с двух участков площадью 30 га и 45 га, то оказалось, что урожай на втором участке был на 555 ц больше, чем на первом. Найдите урожайности на каждом участке, учитывая, что средняя урожайность на двух участках оказалась равной 25 ц/га.

269. Есть треугольник ACB , сторона BC которого на 8 см длиннее стороны AB . Найдите возведенный к плоскости треугольника перпендикуляр BP , учитывая, что точка P отстоит от вершин A и C на 26 см и 30 см.

270. Есть прямоугольный параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ с квадратным основанием $PQRS$. Найдите боковую поверхность четырехугольной пирамиды Q_1PQRS , учитывая, что $PQ = 10$ см, $PR_1 = 10\sqrt{6}$ см.

* * *

271. В треугольнике ABC угол A равен α . Окружности с центрами O_1 и O_2 проходят через точку A и касаются стороны BC в точках B и C . Определите угол O_1PO_2 , где P — еще одна, кроме A , общая точка окружностей.

272. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 = 13y + 12, \\ y^3 = 13z + 12, \\ z^3 = 13x + 12. \end{cases}$$

273. Найдите все тройки чисел a , b и c ($a \neq b$ и $ab \neq 0$), такие, что графиками функций $y = ax^2 + bx + c$ и $y = bx^2 + cx + a$ являются различные параболы с общей вершиной.

6. Степень с действительным показателем

Понятие степени a^t с различными показателями t вводится постепенно. Сначала определяется степень с натуральным показателем n как многократное умножение:

$$a^n \stackrel{\text{опр}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}}. \quad (1)$$

Здесь символом $\stackrel{\text{опр}}{=}$ подчеркивается, что равенство (1) особое: это равенство-определение, и поэтому не требует обоснования в отличие, например, от равенства $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Определение-равенство (1) осмысленное только для тех натуральных значений показателя n , которые не меньше 2, так как умножение есть двуместное действие. Поэтому натуральная степень a^1 требует особого определения, но такого, при котором сохраняются свойства натуральной степени, в частности, свойство $a^k : a^l = a^{k-l}$. С учетом этого должно быть: $a^5 : a^4 = a^{5-4} = a^1$. Вместе с этим $\frac{a^5}{a^4} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = a$. Поэтому первую степень a^1 целесообразно определить так:

$$a^1 \stackrel{\text{опр}}{=} a. \quad (2)$$

Так же, поскольку $a^4 : a^4 = a^{4-4} = a^0$ и вместе с этим $\frac{a^4}{a^4} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = 1$, то нулевую степень a^0 целесообразно определить так:

$$a^0 \stackrel{\text{опр}}{=} 1. \quad (3)$$

Обратив внимание, например, на то, что $a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}$ и вместе с этим $\frac{a^2}{a^5} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3}$, приходим к выводу, что отрицательную целую степень a^{-n} , где n — натуральное число, целесообразно определить так:

$$a^{-n} \stackrel{\text{опр}}{=} \frac{1}{a^n}. \quad (4)$$

При этом, если в равенствах (1) и (2) основание a может иметь любое действительное значение, то в равенствах (3) и (4) это значение должно быть отличным от нуля.

Рациональную степень $a^{\frac{m}{n}}$ с положительным основанием a введем из следующих соображений. Для целых показателей k и l выполняется свойство $(a^k)^l = a^{kl}$. Желательно, чтобы оно выполнялось и для дробных показателей. В таком случае будет $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m$. Но равенство $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$ означает, что число $a^{\frac{m}{n}}$ должно быть корнем n -й степени из числа a^m :

$$a^{\frac{m}{n}} \stackrel{\text{опр}}{=} \sqrt[n]{a^m}. \quad (5)$$

Пример 1. С учетом определения (5) получим:

а) $625^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5;$

б) $243^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{243^3} = \sqrt[5]{(3^5)^3} = (\sqrt[5]{3^5})^3 = 27;$

в) $1024^{-\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{1024^{-4}} = (\sqrt[5]{1024})^{-4} = 4^{-4} = \frac{1}{256}.$

Из определения степени с рациональным показателем следует, что при любом положительном значении основания a и любом рациональном значении показателя t число a^t является положительным.

Поскольку, с учетом свойств корня, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, то значение рациональной степени a^t не зависит от того, какой дробью из множества равных дробей представлен рациональный показатель t .

Если показателем степени является дробь $\frac{m}{n}$ с нечетным знаменателем n , определение (5) распространяется и на отрицательные значения основания a .

Пример 2.

$$\text{а) } (-4)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{(-4)^4} = \sqrt[3]{4^4} = \sqrt[3]{2^8} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 2^2} = 4\sqrt[3]{4};$$

$$\text{б) } (-4)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(-4)^5} = -\sqrt[3]{4^5} = -\sqrt[3]{2^{10}} = -\sqrt[3]{2^9 \cdot 2} = -8\sqrt[3]{2}.$$

Если показателем степени является дробь $\frac{m}{n}$ с четным знаменателем n , то степень $a^{\frac{m}{n}}$ с отрицательным основанием не определяется.

Степень a^t положительного числа a с иррациональным показателем t определяется так.

Пусть $a > 1$. Для числа t выпишем последовательности

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \text{ и } y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$$

его десятичных приближений по недостатку и по избытку соответственно. Тогда

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots < t < \dots < y_n < \dots < y_3 < y_2 < y_1.$$

Из этих неравенств с учетом того, что если $a > 1$ и $u < v$, то $a^u < a^v$, получим:

$$a^{x_1} < a^{x_2} < a^{x_3} < \dots < a^{x_n} < \dots < a^{y_n} \dots < a^{y_3} < a^{y_2} < a^{y_1}. \quad (6)$$

Оценим разность $a^{y_n} - a^{x_n}$. Получим:

$$a^{y_n} - a^{x_n} = a^{x_n} (a^{y_n - x_n} - 1) < a^{y_1} (a^{y_n - x_n} - 1).$$

Если значение переменной n неограниченно увеличивает-ся, то значение выражения $y_n - x_n$ стремится к нулю, значение выражения $a^{y_n - x_n}$ — к единице, а значение выражения $a^{y_n - x_n} - 1$, а потому и выражения $a^{y_1} (a^{y_n - x_n} - 1)$ — к нулю. Это означает, что значения выражений a^{x_n} и a^{y_n} приближаются друг к другу. Можно доказать, что есть только одно чис-

ло b , для которого $a^{x_n} < b < a^{y_n}$ при всех n . Оно и принимается в качестве значения иррациональной степени a^t .

$a^t = b \equiv a^p < b < a^k$, где p и k — рациональные приближения иррационального числа t по недостатку и по избытку соответственно.

Так же определяется иррациональная степень a^t для $0 < a \leq 1$. При этом для любого действительного показателя t

$$1^t = 1. \quad (7)$$

Отметим, что если действительный показатель t больше нуля, то a^t имеет смысл и при $a = 0$, именно:

$$0^t \stackrel{\text{опр}}{=} 0, \text{ если } t > 0. \quad (8)$$

Пример 3. Рассмотрим иррациональную степень $3^{\sqrt[3]{15}}$. Учитывая, что

$$\sqrt[3]{15} = 2,4662120743304701014916113231546...,$$

получим:

$$2 < 2,4 < 2,46 < 2,466 < 2,4662 < \dots < \sqrt[3]{15} < \dots < 2,4663 < 2,467 < 2,47 < 2,5 < 3.$$

Поэтому

$$3^2 < 3^{2,4} < 3^{2,46} < 3^{2,466} < 3^{2,4662} < \dots < 3^{\sqrt[3]{15}} < \dots < 3^{2,4663} < 3^{2,467} < 3^{2,47} < 3^{2,5} < 3^3,$$

или

$$9 < 13,9666 < 14,9183 < 15,0169 < 15,0202 < \dots < 3^{\sqrt[3]{15}} < \dots < 15,0219 < 15,0334 < 15,0831 < 15,5885 < 26.$$

Вычисление на калькуляторе для числа $3^{\sqrt[3]{15}}$ дает:

$$3^{\sqrt[3]{15}} \approx 15,020424245668110725418995118572.$$

Для степени с действительным показателем верны известные вам **основные свойства степени**:

если $a > 0$ и $b > 0$, то: (9)

$$а) a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad з) (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x;$$

$$б) a^x : a^y = a^{x-y}; \quad д) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$

$$в) (a^x)^y = a^{x \cdot y};$$

если $a > 0$, то выражение a^t имеет значение при любом значении переменной t ; (10)

если $a > 0$, то $a^x > 0$ при любом значении переменной x ; (11)

если $a > 1$, то $a^x > 1$ при $x > 0$ и $a^x < 1$ при $x < 0$; (12)

если $0 < a < 1$, то $a^x < 1$ при $x > 0$ и $a^x > 1$ при $x < 0$; (13)

если $a > 1$ и $x_1 > x_2$, то $a^{x_1} > a^{x_2}$; (14)

если $0 < a < 1$ и $x_1 > x_2$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$. (15)

Докажем, например, что $a^x > 0$ при любом иррациональном значении переменной x .

Если $a = 1$, то $a^x = 1 > 0$.

Пусть $a > 1$, x — иррациональное число, x_1 и x_2 — рациональные приближения к x по недостатку и избытку: $x_1 < x < x_2$. Из определения иррациональной степени следует, что $a^{x_1} < a^x < a^{x_2}$, а поскольку $a^{x_1} > 0$, то и $a^x > 0$.

Если $0 < a < 1$, то так же получим, что $a^{x_1} > a^x > a^{x_2} > 0$.

Понятием степени с натуральным показателем пользовались уже в Древней Греции. Об этом свидетельствуют термины *квадрат числа* и *куб числа*, известные с тех времен. Современные обозначения натуральной степени a^2 , a^3 , ..., a^n ввел в 1637 г. французский математик Рене Декарт. Французский математик Николя Орем (около 1323—1382) уже пользовался дробными показателями. Отрицательные и нулевой показатели ввел в обиход французский математик Николя Шюке (около 1445 — около 1500). Нидерландский ученый и инженер Симон Стевин (1548—1620) обратил внимание на то, что $\sqrt[n]{a}$ целесообразно понимать как $a^{\frac{1}{n}}$. Знак $\sqrt{}$ для обозначения корня впервые использовал в 1525 г. чешский математик Кристиан Рудольф (около 1500 — около 1545), а современный символ $\sqrt{}$ с горизонтальной чертой сверху ввел Декарт.

- ?
1. Как определяется натуральная степень a^n действительного числа a ?
 2. Как определяется первая степень действительного числа a ?
 3. Как определяется нулевая степень a^0 действительного числа a ?
 3. Как определяется целая отрицательная степень a^{-n} действительного числа a ?
 4. Как определяется рациональная степень $a^{\frac{m}{n}}$ положительного действительного числа a ?

5. В каком случае рациональная степень $a^{\frac{m}{n}}$ рассматривается и для отрицательных значений основания?

6. Как определяется иррациональная степень a^t действительного числа a для $a > 1$; $0 < a < 1$; $a = 1$; $a = 0$?

7. Сформулируйте свойства произведения и частного действительных степеней с одинаковыми основаниями.

8. Сформулируйте свойства действительной степени произведения, частного, степени.

274. Представьте степенью числа 2 число:

- а) 8; г) $\frac{1}{16}$; ж) $\sqrt{2}$; к) $2\sqrt{2\sqrt{2}}$;
б) 1024; д) 0,5; з) $\sqrt[3]{4}$; л) 0,0625;
в) $\frac{1}{2}$; е) 0,25; и) $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[4]{8}}$; м) 0,015625.

275. Представьте степенью с рациональным показателем число:

- а) $\sqrt[4]{27}$; в) $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}}$; д) $\frac{1}{\sqrt[6]{\left(\frac{2}{3}\right)^{11}}}$;
б) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^5}$; г) $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$; е) $3\sqrt[3]{9}$.

276. Представьте радикалом число:

- а) $3^{-\frac{6}{5}}$; в) $5^{3,2}$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{5}}$;
б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{10}{3}}$; г) $2^{-0,25}$; е) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}$.

277. Найдите значение выражения:

- а) $243^{0,4}$; г) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}$; ж) $8^{\frac{2}{3}} : 81^{0,75}$;
б) $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$; д) $8^{\frac{1}{2}} : (8^{\frac{1}{6}} \cdot 8^{\frac{2}{3}})$; з) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-0,5} \cdot \left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$.
в) $16^{\frac{5}{4}}$; е) $\sqrt[3]{100} \cdot (\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{3}}$;

278. Определите, какое из чисел больше:

- а) $\sqrt[5]{\frac{9}{19}}$ или $\sqrt[5]{\frac{11}{23}}$; в) $\sqrt[3]{3}$ или $\sqrt[5]{6}$; д) 17^{14} или 31^{11} ;
б) $\sqrt[6]{0,44}$ или $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$; г) $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}}$ или $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$; е) $2^{3^{100}}$ или $3^{2^{100}}$.

279. Сравните числа:

- а) $\sqrt[7]{3^3}$ и $3^{\frac{19}{8}}$; в) $\sqrt[3]{6^5}$ и $6^{1,7}$;
 б) $0,4^{-2,7}$ и $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{15}{7}}$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$ и $\sqrt[7]{\frac{1}{32}}$.

280. Представьте степенью выражение:

- а) $2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{8}}$; в) $\frac{3^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{3}}}{9^{\frac{1}{3}}}$; д) $\sqrt{\sqrt[4]{3\sqrt[3]{9}}}$;
 б) $64 \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{6}}$; г) $\left(\frac{2^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{5}{6}}}\right)^3$; е) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

281. Представьте степенью выражение:

- а) $a^5 a^7 a^{12}$; в) $(b^{-1} b^3)^{-2} b^{-3}$; д) $\left((a^2)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}$;
 б) $a^{-2} a^3 a^{-5}$; г) $b^4 \sqrt[4]{b^4} \sqrt[4]{b^3} \sqrt{b}$; е) $\frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-\frac{5}{4}}}{a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}}$.

282. Разложите на множители выражение:

- а) $(ax)^{\frac{1}{3}} + (ay)^{\frac{1}{3}}$; г) $(3x)^{\frac{1}{2}} - (5x)^{\frac{1}{2}}$; ж) $4 - 4^{\frac{1}{3}}$;
 б) $a - a^{-\frac{1}{2}}$; д) $x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} + 1$; з) $c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{4}}$.
 в) $3 + 3^{\frac{1}{2}}$; е) $a + b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$;

283. Определите, имеет ли значение выражение:

- а) $(-5)^{-\frac{2}{3}}$; в) $7^{\frac{11}{43}}$; д) $0^{\frac{5}{7}}$;
 б) $(-3)^{-8}$; г) $0^{-\frac{4}{3}}$; е) $0^{-\sqrt{3}}$.

284. Найдите область определения выражения:

- а) $(x+5)^{-\frac{3}{7}}$; в) $(t-3)^{\frac{3}{4}}$; д) $|x-2|^{-\sqrt{3}}$;
 б) $z^{\frac{5}{3}}$; г) $(7-x)^{\frac{2}{3}}$; е) $|x^2-4|^{\frac{3}{7}}$.

285. Определите, при каких значениях переменной истинно равенство:

- а) $\left(a^{\frac{1}{8}}\right)^8 = a$; в) $(u^{10})^{\frac{1}{10}} = \frac{1}{141}$;
 б) $(x^6)^{\frac{1}{6}} = -x$; г) $(v^{0,7})^{\frac{1}{7}} = -v$.

286. Упростите выражение:

а) $\frac{a-b}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}$; б) $\frac{z-8}{\frac{2}{z^3}+\frac{1}{2z^3}+4}$; в) $\frac{x^{\frac{1}{2}}-4}{x-16}$; г) $\frac{a+b}{\frac{2}{a^3}-\frac{1}{a^3b^3}+\frac{2}{b^3}}$.

287. Упростите выражение:

а) $\frac{x-y}{\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^2y^4}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}$; в) $\frac{1}{a+a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$;
б) $\frac{a-1}{a+a^{\frac{1}{2}}+1} : \frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{\frac{3}{a^2}-1} + 2a^{\frac{1}{2}}$; г) $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$.

288. Упростите выражение:

а) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1}$; в) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1-x} + 49^{\frac{x}{2}} - 7^{x+1}$;
б) $\sqrt{25^{x-2}} - 2 \cdot 5^x + (\sqrt{5})^{2x+4}$; г) $2^x \cdot 3^{2-x} - \frac{8^{\frac{x-1}{3}}}{\frac{x+2}{9^{\frac{x+2}{2}}}} + \frac{(\sqrt{2})^{2x+4}}{(\sqrt{3})^{2x-2}}$.

289. Используя свойства степени с рациональным показателем, докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то:

а) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$; в) $a^x : a^y = a^{x-y}$; д) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$;
б) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; г) $(a^x)^y = a^{xy}$; е) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

290. Используя свойства степени с рациональным показателем, докажите, что:

а) если $a > 1$, то $a^x > 1$ при $x > 0$ и $a^x < 1$ при $x < 0$;
б) если $0 < a < 1$, то $a^x < 1$ при $x > 0$ и $a^x > 1$ при $x < 0$;
в) если $a > 1$ и $x_1 > x_2$, то $a^{x_1} > a^{x_2}$;
г) если $0 < a < 1$ и $x_1 > x_2$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$.

291. Сравните числа:

а) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ и 1; в) $2,5^{-\sqrt{2}}$ и 1;
б) $3^{-\sqrt{12}}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{2,8}$; г) $0,3^{\frac{\sqrt{5}}{6}}$ и $0,3^{\frac{1}{3}}$.

292. Найдите значение выражения:

а) $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$; б) $3^{1-2\sqrt{3}} \cdot 9^{1+\sqrt{3}}$; в) $8^{\sqrt{2}} : 2^{3\sqrt{2}}$; г) $(3^{\frac{5}{8}})^{\sqrt[5]{4}}$.

293. Упростите выражение:

- а) $a^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{a} \right)^{\sqrt{2}-1}$; в) $(a^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}$;
 б) $x^{\pi} \sqrt[4]{x^2 \cdot x^{4\pi}}$; г) $y^{\sqrt{2}} \cdot y^{1,3} : \sqrt[3]{y^{3\sqrt{2}}}$.

294. Упростите выражение:

- а) $\frac{a^{2\sqrt{2}} - b^{2\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})^2} + 1$; в) $\frac{a^{\sqrt{5}} - b^{\sqrt{7}}}{a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}} + a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} \cdot b^{\frac{\sqrt{7}}{3}} + b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}}$;
 б) $\frac{(a^{2\sqrt{3}} - 1)(a^{2\sqrt{3}} + a^{\sqrt{3}} + a^{3\sqrt{3}})}{a^{4\sqrt{3}} - a^{\sqrt{3}}}$; г) $\sqrt{(x^{\pi} + y^{\pi})^2 - \left(\frac{1}{4^{\pi}} xy \right)^{\pi}}$.

295. Упростите выражение:

- а) $(a^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$; г) $(a^{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1})^{1-\sqrt[3]{3}}$;
 б) $\left(m^{\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}} \right)^{-3} \cdot m^{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$; д) $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{ab^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} - \frac{2a^2}{a-b}$;
 в) $(a^{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}})^{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}$; е) $\frac{3xy - y^2}{x-y} - \frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.

296. Вычислите:

- а) $2^{\sqrt{5}} \cdot 2^{-\sqrt{5}}$; г) $((0,5)^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$; ж) $(5^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$;
 б) $3^{2\sqrt{2}} : 9^{\sqrt{2}}$; д) $2^{2-3\sqrt{5}} \cdot 8^{\sqrt{5}}$; з) $(5^{1-\sqrt{5}})^{1+\sqrt{5}} - (\sqrt{5})^0$.
 в) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$; е) $3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 9^{\sqrt[3]{2}}$;

297. Найдите значение выражения:

- а) $2^{1-2\sqrt{2}} \cdot 4^{\sqrt{2}}$; д) $\frac{10^{2+\sqrt{7}}}{2^{2+\sqrt{7}} \cdot 5^{1+\sqrt{7}}}$;
 б) $3^{2-3\sqrt{3}} \cdot 27^{\sqrt{3}}$; е) $\frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$;
 в) $9^{1+\sqrt{3}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}} \cdot 3^{-2-\sqrt{3}}$; ж) $(25^{1+\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}}$;
 г) $4^{3+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{-4-\sqrt{2}}$; з) $(2^{2\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}) \cdot 2^{-2\sqrt{3}}$.

298. Определите, какое из чисел больше:

- а) $3^{\sqrt{71}}$ или $3^{\sqrt{69}}$; в) $4^{-\sqrt{3}}$ или $4^{-\sqrt{2}}$; д) $\left(\frac{1}{2} \right)^{1,4}$ или $\left(\frac{1}{2} \right)^{\sqrt{2}}$;
 б) $\left(\frac{1}{3} \right)^{\sqrt{3}}$ или $\left(\frac{1}{3} \right)^{\sqrt{2}}$; г) $2^{\sqrt{3}}$ или $2^{1,7}$; е) $\left(\frac{1}{9} \right)^{\pi}$ или $\left(\frac{1}{9} \right)^{3,14}$.

299. Сравните с единицей выражение:

- а) 2^{-2} ; в) $\left(\frac{2}{7}\right)^5$; д) $2^{-\sqrt{5}}$; ж) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$;
б) $(0,013)^{-1}$; г) $27^{1,5}$; е) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; з) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}$.

300. Упростите выражение:

- а) $a^{\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}}$; в) $(b^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} : b^2$;
б) $a^{\sqrt{3}-1} \cdot a^{\sqrt{3}+1}$; г) $(y^{\sqrt{3}-1})^{(4+\sqrt{3})}$.

301. Упростите выражение:

- а) $\frac{a^{\frac{1}{2}} a^{-0,5}}{a^3}$; в) $(v^{2,5})^2 \sqrt[5]{v}$; д) $c^{-2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{c^{-\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1}$;
б) $\frac{x^{-3} x^{\frac{7}{3}}}{x^3}$; г) $\sqrt[7]{y^2 (y^{\frac{3}{14}})^2}$; е) $\left(\frac{z^{\sqrt{3}}}{t^{\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{z^{-1-\sqrt{3}}}{t^{-2}}$.

302. С помощью калькулятора найдите значение выражения:

- а) $5^{\cos 143}$; г) $56^{\sin(-2)}$; ж) $8^{\operatorname{ctg} 147,6}$; к) $4,9^{\sqrt[4]{118}}$;
б) $1,7^{\sqrt[4]{3}}$; д) $0,6^{\sqrt[3]{120}}$; з) $5,7^{\sqrt[5]{9}}$; л) $4^{\sin 68}$;
в) $7^{\sqrt[3]{5}}$; е) $3^{\operatorname{tg} 0,3}$; и) $3^{\sqrt[3]{18,4}}$; м) $27^{\cos(-5)}$.

303. Найдите наибольшее целое значение переменной x , удовлетворяющее неравенству:

- а) $\frac{7x+1}{9} + \frac{5-4x}{5} \geq 1$; в) $\frac{5t-2}{8} - \frac{3t-1}{4} \geq -\frac{2}{3}$;
б) $\frac{10y-2}{9} - \frac{9y+2}{10} \leq -2$; г) $\frac{8u-2}{5} - \frac{4u-3}{3} \leq \frac{8}{7}$.

304. Найдите сумму целых решений неравенства:

- а) $\frac{7a+1}{4a-3} < 0$; в) $\frac{5-3x}{5x+17} > 0$; д) $\frac{2}{5b-8} \geq 1$;
б) $\frac{10c-3}{5c-2} < 0$; г) $\frac{7y-32}{2-31y} > 0$; е) $\frac{2}{3z-5} \geq 1$.

305. Найдите:

- а) основание равнобедренного треугольника с высотой 35 и периметром 98;
б) боковую сторону равнобедренного треугольника с высотой 20 и площадью 420.

306. Найдите площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной $\frac{\sqrt{481}}{2}$, учитывая, что высота, проведенная к основанию, равна 10.

307. Гипотенуза прямоугольного треугольника втрое больше одного из его катетов. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, учитывая, что больший катет равен $4\sqrt{2}$.

308. Найдите стороны прямоугольного треугольника, учитывая, что радиусы его описанной и вписанной окружностей равны 17 и 6 соответственно.

309. Найдите наименьший корень уравнения $\frac{3}{\operatorname{tg} 3x} = \sqrt{3}$, принадлежащий промежутку $(-\frac{\pi}{2}; 0)$.

310. Найдите периметр треугольника, одна сторона которого равна $\frac{17\sqrt{2}}{4}$, а прилежащие к ней углы — 105° и 45° .

311. В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{x} + 1$;

г) $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{-2x}$;

б) $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{x+1}$;

д) $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{2}{x-1}$;

в) $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{2}{x}$;

е) $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{3-2x}$.

312. В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = x^2$ и $y = x^2 + 1$;

в) $y = x^2$ и $y = 2x^2$;

б) $y = x^2$ и $y = (x+1)^2$;

г) $y = x^2$ и $y = (2x+1)^2 - 2$.

313. Постройте график четной функции, учитывая, что она задана условием $y = (x+1)^2$:

а) при положительных значениях аргумента;

б) при отрицательных значениях аргумента.

314. Постройте график нечетной функции, учитывая, что она задана условием $y = 2x^2 - 4x$:

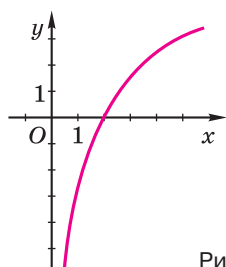


Рис. 62

а) при положительных значениях аргумента;

б) при отрицательных значениях аргумента.

315. На рисунке 62 показан график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:

- а) $y = f(x) - 1$; в) $y = 2f(x)$; д) $y = |f(x)|$; ж) $y = f(-|x|)$;
 б) $y = f(x - 1)$; г) $y = f(2x)$; е) $y = f(|x|)$; з) $y = (f(x))^2$.

316. На рисунке 63 показан график функции $y = f(x - 1)$. Постройте график функции:

- а) $y = f(x)$; д) $y = |f(x)|$;
 б) $y = f(x) - 1$; е) $y = f(|x|)$;
 в) $y = 2f(x)$; ж) $y = f(-|x|)$;
 г) $y = f(2x)$; з) $y = (f(x))^2$.

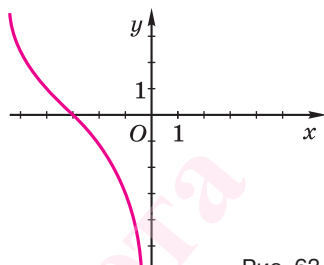


Рис. 63

317. На высоте AD треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Найдите отрезки AN и NC , учитывая, что $BD = 12$ см, $DC = 4$ см и $AM - MB = 2$ см.

318. Основание равнобедренного треугольника равно 36 см, а боковая сторона — 30 см. Найдите расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей.

319. Найдите медиану, проведенную к боковой стороне равнобедренного треугольника, учитывая, что вне окружности, построенной на боковой стороне как на диаметре, находится 6 см основания треугольника и $5\frac{1}{7}$ см боковой стороны.

* * *

320. Найдите все натуральные решения уравнения $15x + 21y^2 + 35z^3 = 2310$.

321. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит ее на части, разность которых равна этой высоте. Найдите углы треугольника.

322. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD к гипотенузе. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки A на медиану CM треугольника BCD , делит отрезок CD пополам.

323. Докажите, что если $x > 1$, то $f(f(x)) = x$, учитывая, что

$$f(x) = \frac{x + 2 + \sqrt{2x - 1}}{x - \sqrt{2x - 1}}.$$

324. Можно ли по окружности расставить числа 1, 2, 3, ..., 13, 14 так, чтобы два любых соседних числа отличались на 3, 4 или 5?

7. Степенная функция с действительным показателем

Выражение x^t , в котором переменные x и t могут принимать разные действительные значения, описывает разные функции в зависимости от того, значение какой переменной — x или t — сделать неизменным, постоянным.

Если зафиксировать значение переменной t , т. е. придать этой переменной определенное числовое значение r , то выражение x^t задает *степенную функцию* $y = x^r$.

Если зафиксировать значение переменной x , т. е. придать ей определенное числовое значение a , то выражение x^t задает *показательную функцию* $y = a^t$.

В этом параграфе рассмотрим **степенную функцию**, т. е. функцию вида $y = x^r$, где x — аргумент, а r — некоторое действительное число.

Все степенные функции определены при положительных значениях аргумента. При некоторых показателях r область определения степенной функции $y = x^r$ более широкая. Например, степенные функции $y = x^{0,5}$ и $y = x^2$ своими областями определения имеют соответственно множество всех неотрицательных действительных чисел и всех действительных чисел.

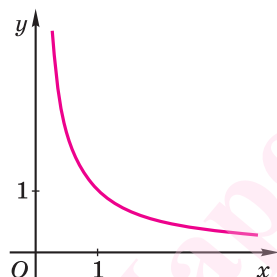


Рис. 64

Рассмотрим сначала степенную функцию $y = x^r$ при $x > 0$. При положительных значениях аргумента ее значениями являются все положительные действительные числа. Ряд свойств степенной функции $y = x^r$ и ход ее графика зависят от значения показателя r .

Если $r < 0$, то свойства степенной функции похожи на свойства функции $y = x^{-1}$ (рис. 64).

При $r < 0$ степенная функция $y = x^r$:

- убывает от $+\infty$ до 0;
- выпукла вниз, т. е. часть ее графика, ограниченного любыми двумя его точками, расположена ниже отрезка, который эти точки соединяет (рис. 65).

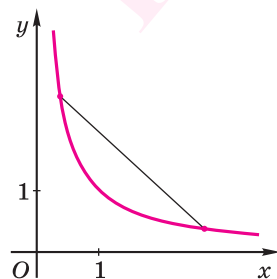


Рис. 65

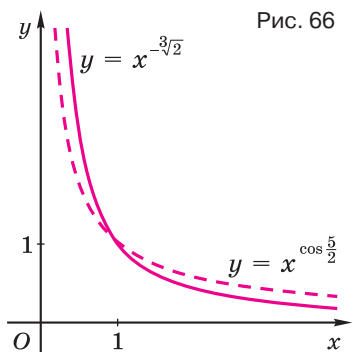


Рис. 66

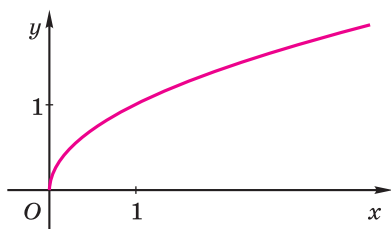


Рис. 67

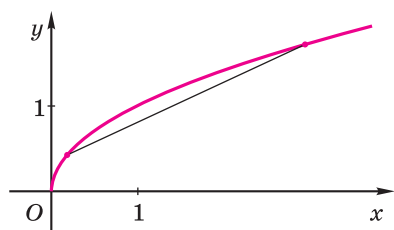


Рис. 68

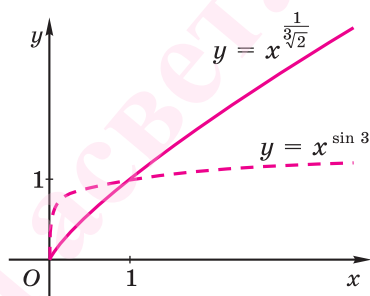


Рис. 69

На рисунке 66 показаны графики степенных функций $y = x^{-\frac{3}{\sqrt{2}}}$ и $y = x^{\cos \frac{5}{2}}$ с отрицательными показателями $-\frac{3}{\sqrt{2}}$ и $\cos \frac{5}{2}$, которые соответственно приблизительно равны $-1,26$ и $-0,801$.

Если $0 < r < 1$, то свойства степенной функции похожи на свойства функции $y = x^{\frac{1}{2}}$ (рис. 67).

При $0 < r < 1$ степенная функция $y = x^r$:

- возрастает от 0 до $+\infty$;
- выпукла вверх, т. е. часть ее графика, ограниченного любыми двумя его точками, расположена выше отрезка, который эти точки соединяет (рис. 68).

На рисунке 69 показаны графики функций $y = x^{\frac{1}{3\sqrt{2}}}$ и $y = x^{\sin 3}$ с положительными меньшими единицы показателями $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ и $\sin 3$, которые соответственно приблизительно равны $0,79$ и $0,14$.

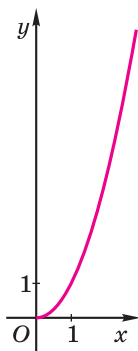


Рис. 70

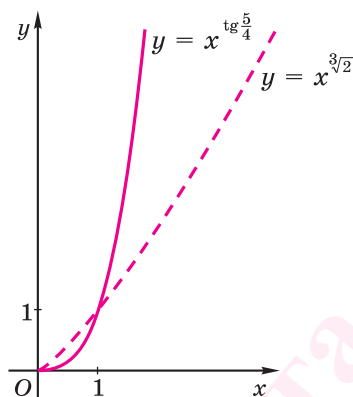


Рис. 71

Если $r > 1$, то свойства степенной функции похожи на свойства функции $y = x^2$ (рис. 70).

При $r > 1$ степенная функция $y = x^r$:

- возрастает от 0 до $+\infty$;
- выпукла вниз.

На рисунке 71 показаны графики функций $y = x^{\sqrt[3]{2}}$ и $y = x^{\text{tg } \frac{5}{4}}$ с положительными большими единицы показателями $\sqrt[3]{2}$ и $\text{tg } \frac{5}{4}$, которые соответственно приблизительно равны 1,26 и 3,01.

При положительных показателях степени в область определения функции включается и число 0, поскольку при $r > 0$ верно равенство $0^r = 0$.

Если показатель r степени x^r есть рациональное число $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — нечетное натуральное число и числа m и n взаимно просты, степенная функция $y = x^{\frac{m}{n}}$, т. е. функция $y = \sqrt[n]{x^m}$, может быть распространена и на отрицательные значения аргумента x , так как в этом случае выражение $\sqrt[n]{x^m}$ имеет значения при всех значениях переменной x .

При этом, если m — нечетное число, то $(-x)^{\frac{m}{n}} = -x^{\frac{m}{n}}$, а если m — четное число, то $(-x)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$. Это означает, что при нечетных значениях числителя m функция $y = x^{\frac{m}{n}}$ нечетная, а при четных — четная. Отмеченное позволяет получить гра-

фик функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ при отрицательных значениях аргумента симметричным отображением графика функции при $x > 0$ относительно начала координат или оси ординат при нечетных и при четных значениях числителя m соответственно.

На рисунках 72, 73 и 74 показаны графики функций $y = x^{\frac{3}{5}}$, $y = x^{\frac{3}{5}}$ и $y = x^{\frac{11}{5}}$ с нечетными значениями числителя m , а на рисунках 75, 76 и 77 — графики функций $y = x^{\frac{12}{5}}$, $y = x^{\frac{2}{5}}$ и $y = x^{\frac{12}{5}}$ с четными значениями числителя m .

Если знаменатель n — четное натуральное число, то числитель m может быть только нечетным, так как в противном

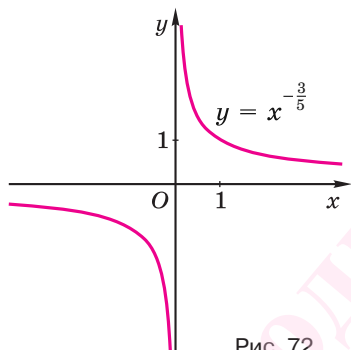


Рис. 72

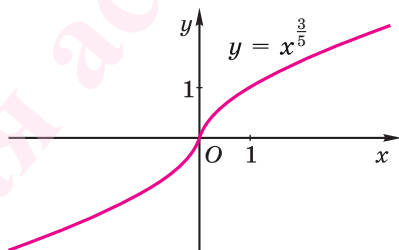


Рис. 73

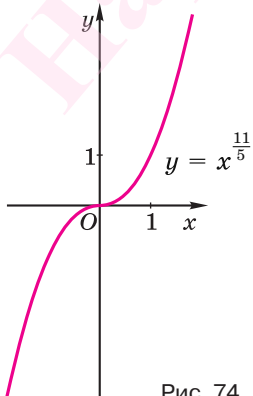


Рис. 74

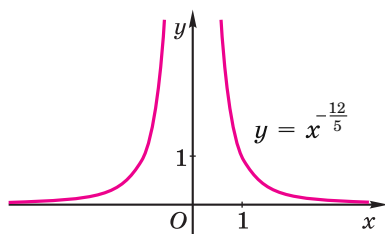


Рис. 75

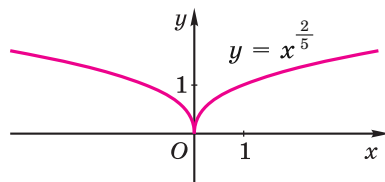


Рис. 76

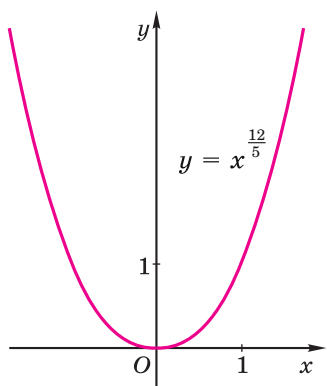


Рис. 77

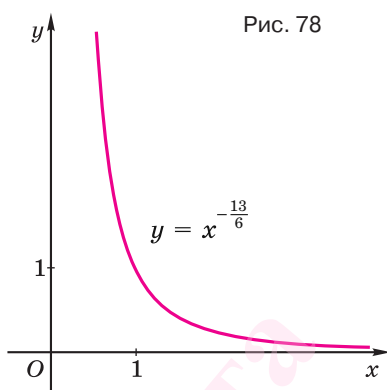


Рис. 78

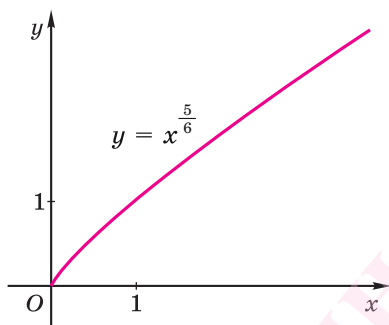


Рис. 79

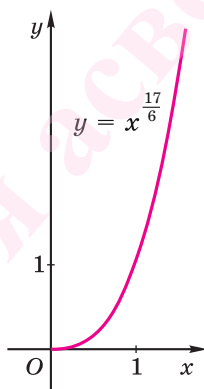


Рис. 80

случае дробь $\frac{m}{n}$ будет сократимой. Учитывая, что выражение $x^{\frac{m}{n}}$, т. е. выражение $\sqrt[n]{x^m}$, имеет значения только если $x \geq 0$ при $m > 0$ и $x > 0$ при $m \leq 0$, получаем, что при четном значении знаменателя n функция $y = x^{\frac{m}{n}}$ не распространяется на отрицательные значения аргумента. На рисунках 78, 79 и 80 показаны графики функций $y = x^{-\frac{13}{6}}$, $y = x^{\frac{5}{6}}$ и $y = x^{\frac{17}{6}}$.

Раньше было доказано, что производная y' степенной функции $y = x^n$ для целого показателя n определяется формулой $y' = nx^{n-1}$. Можно доказать, что по этой же формуле можно находить производную степенной функции при любом действительном показателе:

$$(x^r)' = rx^{r-1}.$$



1. Какая функция называется степенной функцией?

2. Представьте схематически график функции $y = x^r$ при действительном отрицательном значении показателя r и укажите ее основные свойства.

3. Представьте схематически график функции $y = x^r$ при действительном положительном, меньшем единицы, значении показателя r и укажите ее основные свойства.

4. Представьте схематически график функции $y = x^r$ при действительном, большем единицы, значении показателя r и укажите ее основные свойства.

5. Представьте схематически график функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ с рациональным показателем $\frac{m}{n}$, где n — нечетное натуральное число и m — нечетное отрицательное целое число, и укажите ее основные свойства.

6. Представьте схематически график функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ с рациональным показателем $\frac{m}{n}$, где n — нечетное натуральное число и m — нечетное натуральное число, меньшее числа n , и укажите ее основные свойства.

7. Представьте схематически график функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ с рациональным показателем $\frac{m}{n}$, где n — нечетное натуральное число и m — нечетное натуральное число, большее числа n , и укажите ее основные свойства.

8. Представьте схематически график функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ с рациональным показателем $\frac{m}{n}$, где n — нечетное натуральное число и m — четное отрицательное целое число, и укажите ее основные свойства.

9. Представьте схематически график функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ с рациональным показателем $\frac{m}{n}$, где n — нечетное натуральное число и m — четное натуральное число, меньшее числа n , и укажите ее основные свойства.

10. Представьте схематически график функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ с рациональным показателем $\frac{m}{n}$, где n — нечетное натуральное число и m — четное натуральное число, большее числа n , и укажите ее основные свойства.

325. Докажите, что если $x_1 > x_2 > 0$, то:

- а) $x_1^r < x_2^r$ при отрицательном действительном r ;
б) $x_1^r > x_2^r$ при положительном действительном r .

326. Докажите, что если $r_1 < r_2$, то:

- а) $x^{r_1} < x^{r_2}$ при $x > 1$; б) $x^{r_1} > x^{r_2}$ при $0 < x < 1$.

327. На промежутке $[-2; 2]$ с шагом $0,5$ с помощью калькулятора составьте таблицу значений функции:

а) $y = x^{\frac{18}{7}}$ и постройте ее график;

б) $y = x^{\frac{17}{7}}$ и постройте ее график;

в) $y = x^{\frac{17}{8}}$ и постройте ее график;

г) $y = x^{\frac{8}{9}}$ и постройте ее график;

д) $y = x^{\frac{11}{13}}$ и постройте ее график;

е) $y = x^{\frac{11}{12}}$ и постройте ее график.

328. Запишите уравнение сплошной кривой и уравнение штриховой кривой, представленных на рисунке:

а) 81, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{\frac{20}{9}}$, а другая — функцию $y = x^{\frac{34}{27}}$;

б) 82, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{\frac{19}{9}}$, а другая — функцию $y = x^{\frac{35}{27}}$;

в) 83, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{\frac{13}{6}}$, а другая — функцию $y = x^{\frac{13}{12}}$;

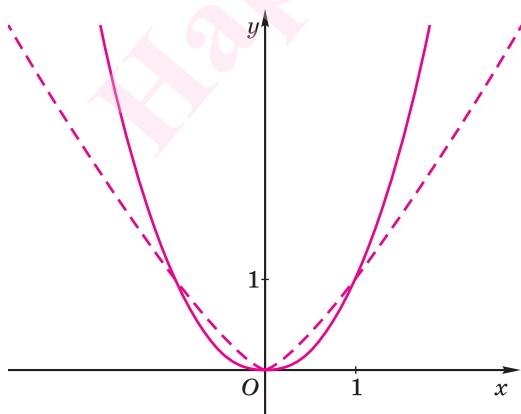


Рис. 81

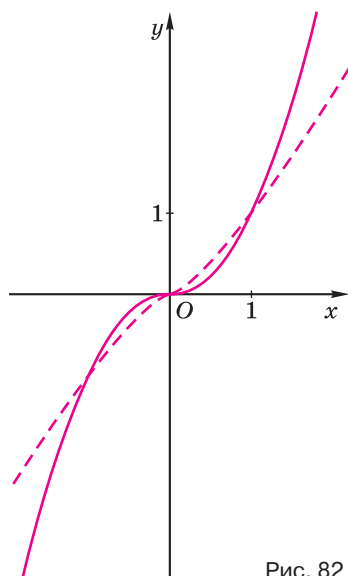


Рис. 82

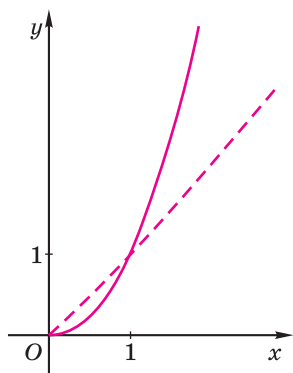


Рис. 83

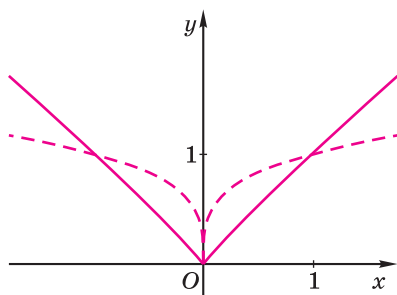


Рис. 84

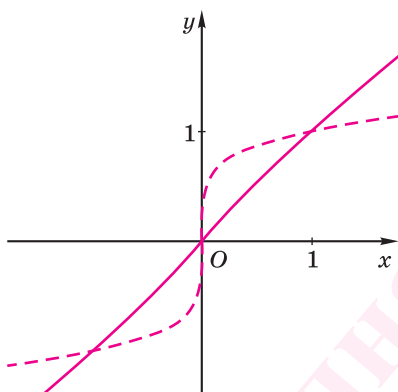


Рис. 85

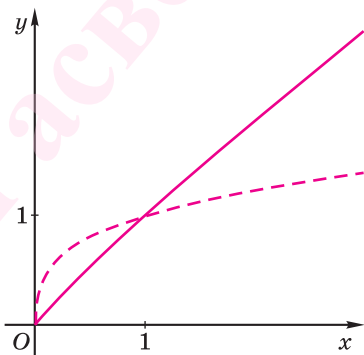


Рис. 86

- г) 84, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{\frac{14}{15}}$, а другая — функцию $y = x^{\frac{4}{15}}$;
- д) 85, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{\frac{15}{17}}$, а другая — функцию $y = x^{\frac{11}{51}}$;
- е) 86, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{\frac{9}{10}}$, а другая — функцию $y = x^{\frac{3}{10}}$.

329. Запишите уравнение сплошной кривой и уравнение штриховой кривой, представленных на рисунке:

- а) 87, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$, а другая — функцию $y = x^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$;

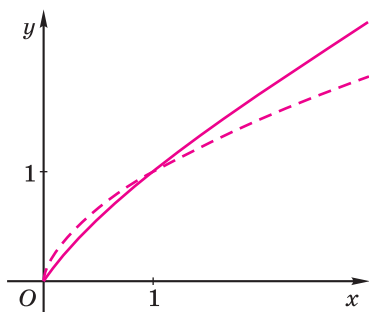


Рис. 87

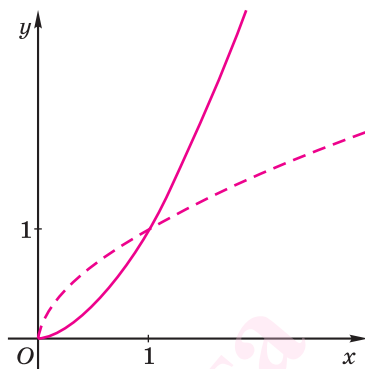


Рис. 88

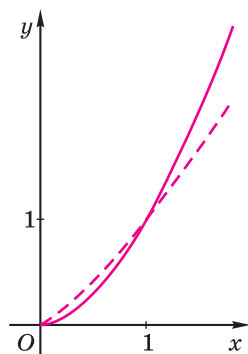


Рис. 89

- б) 88, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{\sqrt{3}}$, а другая — функцию $y = x^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$;
 в) 89, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{\sqrt{3}}$, а другая — функцию $y = x^{\sqrt[7]{5}}$.

330. На промежутке $[-2; 2]$ с шагом 0,5 с помощью калькулятора составьте таблицу значений функции:

- а) $y = x^{\frac{23}{7}}$ и постройте ее график;
 б) $y = x^{\frac{22}{7}}$ и постройте ее график;
 в) $y = x^{\frac{23}{8}}$ и постройте ее график.

331. Запишите уравнение сплошной кривой и уравнение штриховой кривой, представленных на рисунке:

- а) 90, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{\frac{3}{13}}$, а другая — функцию $y = x^{\frac{11}{12}}$;
 б) 91, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{\frac{15}{13}}$, а другая — функцию $y = x^{\frac{27}{13}}$;
 в) 92, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{\frac{21}{8}}$, а другая — функцию $y = x^{\frac{7}{4}}$;

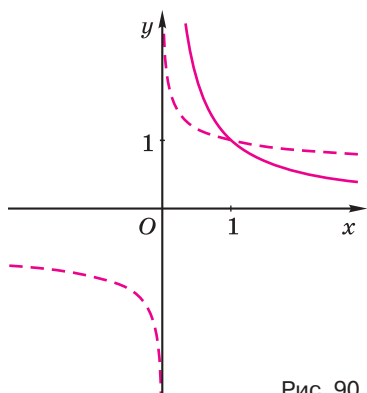


Рис. 90

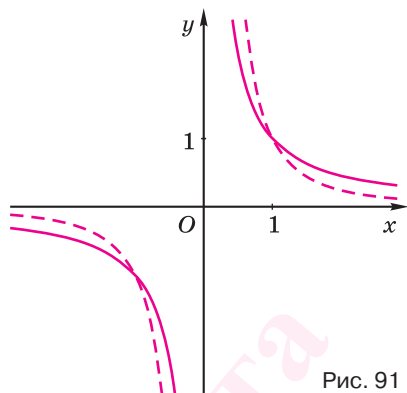


Рис. 91

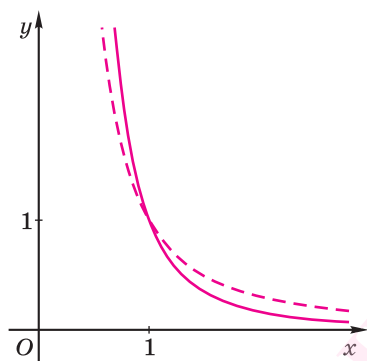


Рис. 92

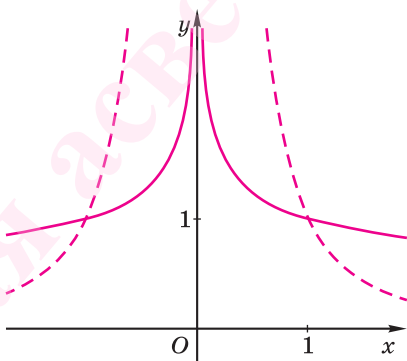


Рис. 93

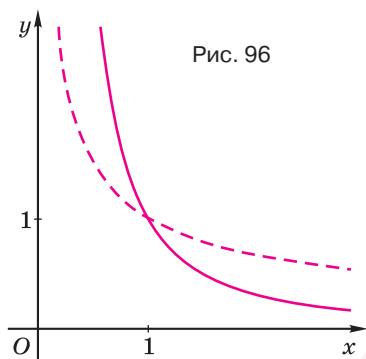
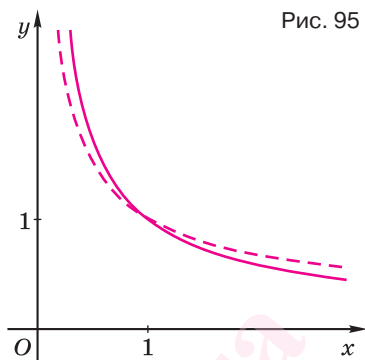
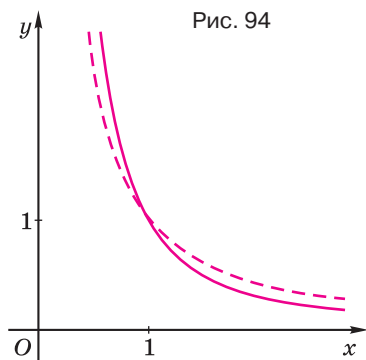
г) 93, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{-\frac{4}{13}}$, а другая — функцию $y = x^{-\frac{28}{13}}$.

332. Запишите уравнение сплошной кривой и уравнение штриховой кривой, представленных на рисунке:

а) 94, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{-\sqrt{3}}$, а другая — функцию $y = x^{-\frac{7}{5}}$;

б) 95, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$, а другая — функцию $y = x^{\frac{1}{\sqrt[7]{5}}}$;

в) 96, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{-\sqrt{3}}$, а другая — функцию $y = x^{-\frac{1}{\sqrt[3]{5}}}$.



333. Докажите, что степенная

функция $y = x^{\frac{m}{n}}$, где n — натуральное число и m — целое число, взаимно простое с n , при:

а) нечетном значении n и нечетном положительном значении m на промежутке $(-\infty; +\infty)$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$;

б) нечетном значении n и не-

четном отрицательном значении m на промежутке $(-\infty; 0)$ убывает от 0 до $-\infty$ и на промежутке $(0; +\infty)$ убывает от $+\infty$ до 0 ;

в) нечетном значении n и четном положительном значении m на промежутке $(-\infty; 0]$ убывает от $+\infty$ до 0 и на промежутке $[0; +\infty)$ возрастает от 0 до $+\infty$;

г) нечетном значении n и четном отрицательном значении m на промежутке $(-\infty; 0)$ возрастает от 0 до $+\infty$ и на промежутке $(0; +\infty)$ убывает от $+\infty$ до 0 ;

д) четном значении n и нечетном положительном значении m на промежутке $[0; +\infty)$ возрастает от 0 до $+\infty$;

е) четном значении n и нечетном отрицательном значении m на промежутке $(0; +\infty)$ убывает от $+\infty$ до 0 ;

ж) нечетном значении n и нечетном значении m является нечетной;

з) нечетном значении n и четном значении m является четной.

334. Из рисунков 97—105 укажите тот, на котором представлен график функции:

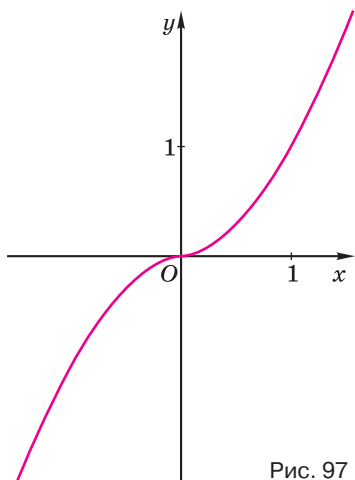


Рис. 97

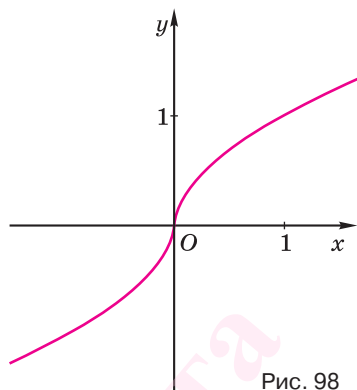


Рис. 98

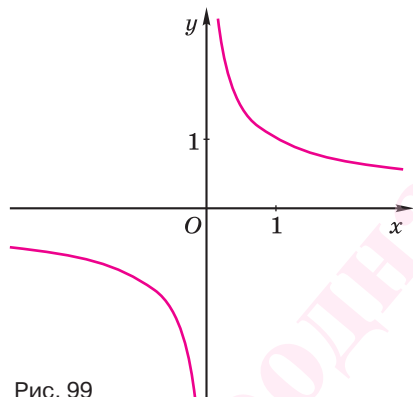


Рис. 99

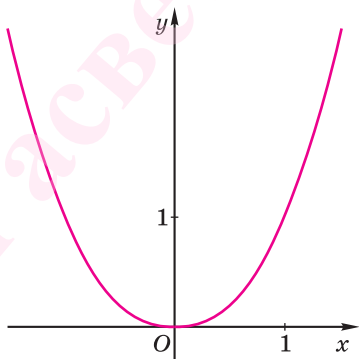


Рис. 100

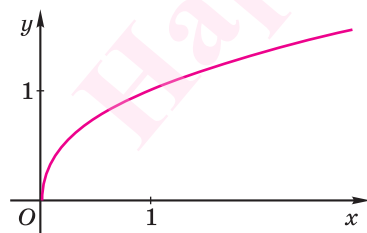


Рис. 101

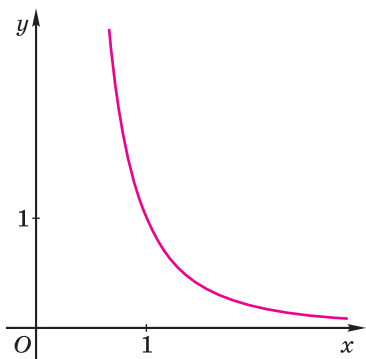


Рис. 102

а) $y = x^{\frac{9}{4}}$;

в) $y = x^{\frac{5}{9}}$;

д) $y = x^{\frac{4}{9}}$;

б) $y = x^{\frac{9}{5}}$;

г) $y = x^{\frac{12}{5}}$;

е) $y = x^{\frac{5}{12}}$;

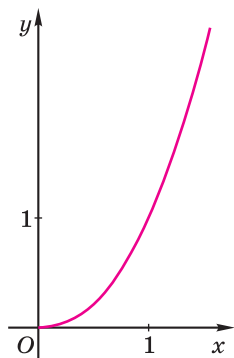
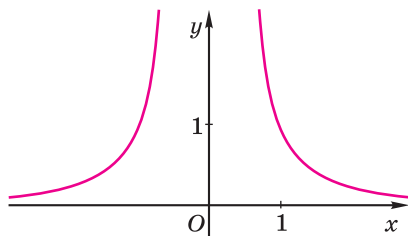


Рис. 103

Рис. 104



ж) $y = x^{\frac{9}{4}}$;

з) $y = x^{\frac{12}{5}}$;

и) $y = x^{-\frac{5}{9}}$.

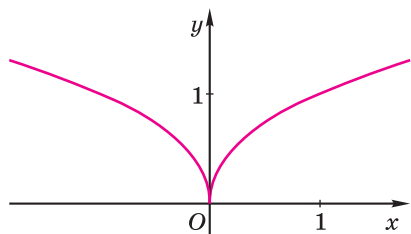


Рис. 105

335. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{\frac{5}{3}}$ на промежутке:

а) $[1; 8]$;

в) $(-1; 8]$;

б) $[-1; 8]$;

г) $(-1; -8)$.

336. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{-\frac{5}{3}}$ на промежутке:

а) $[-0,125; 2]$;

в) $(-0,125; 2]$;

б) $(-0,125; 2)$;

г) $[-0,125; 2)$.

337. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{\frac{4}{3}}$ на промежутке:

а) $[1; 8]$;

в) $[-1; 8]$;

д) $(-1; 8]$;

б) $[-8; -1]$;

г) $(-1; 8]$;

е) $[-1; 8]$.

338. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{\frac{3}{4}}$ на промежутке:

а) $[1; 16]$;

в) $[-1; 16]$;

д) $(-1; 16]$;

б) $[-16; -1]$;

г) $(-1; 16]$;

е) $[-1; 16]$.

339. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{-\frac{3}{4}}$ на промежутке:

- а) $[1; 16]$; б) $[0,625; 16]$; в) $[0,625; 1]$.

340. Укажите область определения и область значений, начертив схематически график функции:

- а) $y = x^6$; в) $y = x^5$; д) $y = x^{\frac{1}{2}}$; ж) $y = x^{-2}$;
б) $y = x^{\frac{6}{5}}$; г) $y = x^{\frac{7}{5}}$; е) $y = x^{\frac{3}{2}}$; з) $y = x^{-\frac{3}{2}}$.

341. Определите, какой — возрастающей или убывающей — является функция $y = x^r$ при $x > 0$, учитывая, что:

- а) $r = \sqrt{7}$; в) $r = 1 - \sqrt{3}$; д) $r = 3 - \pi$;
б) $r = \frac{3}{\pi}$; г) $r = \frac{1}{\pi}$; е) $r = 0, (3)$.

342. Нарисуйте схематически график функции:

- а) $y = x^{\frac{2}{5}}$; в) $y = x^{\frac{5}{2}}$; д) $y = x^{-5}$; ж) $y = x^{\sqrt{3}}$;
б) $y = x^{\frac{9}{5}}$; г) $y = x^{\frac{5}{7}}$; е) $y = x^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$; з) $y = x^{\frac{4}{\sqrt[3]{4}}}$.

343. Используя свойства степенной функции, сравните с единицей число:

- а) $4, 1^{2,7}$; в) $0, 2^{0,3}$; д) $0, 7^{9,1}$; ж) $(\sqrt{3})^{0,2}$;
б) $5, 2^{\lg 7,8}$; г) $0, 2^{\cos 13}$; е) $0, 7^{\text{ctg} 9,5}$; з) $(\sqrt{3})^{\sin 13,2}$.

344. Сравните значения выражений:

- а) $3, 1^{7,2}$ и $4, 3^{7,2}$; в) $0, 3^{0,3}$ и $0, 2^{0,3}$; д) $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{8}{10}\right)^{-2}$;
б) $\left(\frac{10}{11}\right)^{2,3}$ и $\left(\frac{12}{11}\right)^{2,3}$; г) $2, 5^{-3,1}$ и $2, 6^{-3,1}$; е) $\left(\frac{14}{15}\right)^{\frac{3}{4}}$ и $\left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$.

345. Найдите производную функции:

- а) $y = 2x^5$; в) $y = 5x^7$; д) $y = 4x^{\text{tg} 1,25}$;
б) $y = 3x^4$; г) $y = 3x^{\sqrt{5}}$; е) $y = 3x^{\sqrt{5}-1}$.

346. Найдите производную функции:

- а) $y = x^{\sqrt{2}}$; г) $y = (x-2)^{\sqrt{2}}$; ж) $y = \frac{1}{2}(2x-2)^{\sqrt{2}}$;
б) $y = 2x^{\sqrt{2}}$; д) $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^{\sqrt{2}}$; з) $y = (x-2)^{2\sqrt{2}}$.
в) $y = (2x)^{\sqrt{2}}$; е) $y = \frac{1}{2}(x-2)^{\sqrt{2}}$;

347. Одна из сторон треугольника равна 13 см. Найдите две другие его стороны, учитывая, что одна из них больше другой на 7 см, а угол между ними равен 60° .

348. Боковые стороны трапеции равны 9 и 13 см, а основания и меньшая диагональ относятся как $9:6:4$. Найдите среднюю линию трапеции.

349. Найдите периметр прямоугольного треугольника с гипотенузой 20, учитывая, что радиус вписанной в него окружности равен 4.

350. Найдите:

- а) периметр описанной около окружности трапеции со средней линией 12;
- б) площадь прямоугольной трапеции, описанной около окружности с радиусом 3, больший угол которой равен 150° .

351. Найдите основания трапеции, боковые стороны которой равны 10 и 16, а меньшая диагональ длиной 12 является средним геометрическим оснований.

352. Найдите:

- а) наибольшее целое отрицательное решение неравенства

$$|x + 5| > 13;$$

- б) среднее арифметическое корней уравнения

$$|x + 5| = 2 \cdot (16 - x).$$

353. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + y = -2, \\ 2x + 3y = 1; \end{cases}$	в) $\begin{cases} \frac{1}{t} + \frac{8}{191 - 35z} = 0, \\ 19t + 12z = 22; \end{cases}$
б) $\begin{cases} 9a + 16b = 114, \\ \frac{1}{5a - 14b + 75} = 1; \end{cases}$	г) $\begin{cases} 8c + 25d = 110, \\ \frac{3d - 6c - 25}{5c + 8d} = 1. \end{cases}$

354. Решите уравнение:

- а) $(a - 3)(a - 4)(a - 7)(a - 8) = 60;$
- б) $(b + 6)(b + 7)(b + 9)(b + 10) = 10;$
- в) $(c + 2)(c + 5)(c + 15)(c + 18) = -360;$
- г) $(12d - 1)(6d - 1)(4d - 1)(3d - 1) = 5.$

355. Решите уравнение:

а) $\sqrt{\frac{1}{1-w} + \frac{1}{w}} = \frac{2}{\sqrt{1-w}};$ в) $\sqrt{\frac{2}{v+3} - \frac{1}{v+1}} = \sqrt{\frac{3}{v+3}};$

б) $\sqrt{\frac{u+1}{1-u} - \frac{u}{u+2}} = \frac{1}{\sqrt{u+2}};$ г) $\sqrt{\frac{31-y}{9-y^2}} = \frac{3}{\sqrt{3+y}}.$

356. Решите уравнение:

а) $10s - \sqrt{2s+1} = 1;$ в) $2\sqrt{p+1} - \frac{4}{\sqrt{p+1}} + 7 = 0;$

б) $4\sqrt{r-5} = \frac{13}{\sqrt{r-5}} - 9;$ г) $\frac{4}{5q+25} = \frac{1}{1-2\sqrt{q+5}}.$

357. Решите неравенство:

а) $\sqrt{i+3} > 2;$ в) $\sqrt{24-5k} < k;$ д) $\sqrt{n+1} < n-1;$

б) $\sqrt{j-3} < 2;$ г) $\sqrt{m+6} > m;$ е) $\sqrt{2x-1} > x-2.$

* * *

358. Докажите, что окружности, описанные около четырех треугольников, образовавшихся при пересечении четырех прямых (рис. 106), проходят через одну точку.

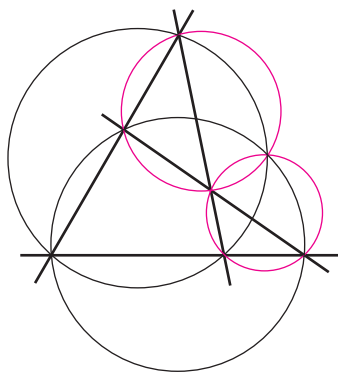


Рис. 106

359. Решите уравнение

$$\sqrt{1-2y}(1-4y\sqrt{1+2y}) = 8y^2 - 1.$$

360. Докажите, что при $n > 1$ истинно неравенство

$$\left(1 - \frac{2}{2^3+1}\right)\left(1 - \frac{2}{3^3+1}\right)\left(1 - \frac{2}{4^3+1}\right)\dots\left(1 - \frac{2}{n^3+1}\right) > \frac{2}{3}.$$

361. Решите уравнение $f(f(f(f(f(x)))))) = 0$, где $f(x) = x^2 + 10x + 20$.

8. Иррациональные выражения, уравнения и неравенства

С действием возведения в степень связаны разные виды выражений. Будем рассматривать выражения с переменными, при образовании которых используются действия сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень, причем возведение в степень хотя бы один раз применено к выражению с переменной. Если показатель степени целый, то возникает *рациональное выражение*, если дробный, то — *иррациональное выражение*, а если иррациональный, то — *трансцендентное выражение*. К трансцендентным выражениям приводят и действия нахождения значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса, арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса. Рациональные и иррациональные выражения вместе составляют множество *алгебраических выражений*.

Из выражений

$$\begin{array}{lll} (1) x^2 + 3x - 7, & (2) \frac{a^3 - 3a}{a^2 + 12}, & (3) t^{\frac{1}{3}} - 3t, \\ (4) \sqrt[4]{3y^5 - 7}, & (5) x^{\sqrt[6]{7}} + 3x^2 - 7, & (6) \sqrt{z} : \cos z \end{array}$$

выражения (1) и (2) являются рациональными, выражения (3) и (4) — иррациональными, выражения (5) и (6) — трансцендентными, а выражения (1)—(4) — алгебраическими.

В зависимости от того, из каких выражений составлено уравнение, говорят о *рациональных, иррациональных, трансцендентных уравнениях*.

Из уравнений

$$\begin{array}{lll} (1) x^2 + 3x = 7, & (2) \frac{a^3 - 3a}{a^2 + 12} = 2a, & (3) t^{\frac{1}{3}} - 3t = 0, \\ (4) \sqrt[4]{3y^5 - 7} = y^{\frac{1}{2}}, & (5) x^{\sqrt[6]{7}} + 3x^2 - 7 = 0, & (6) \sqrt{z} = \cos z \end{array}$$

уравнения (1) и (2) являются рациональными, уравнения (3) и (4) — иррациональными, а уравнения (5) и (6) — трансцендентными.

Так же говорят о *рациональных, иррациональных, трансцендентных неравенствах*.

В этом параграфе рассматривается решение иррациональных уравнений и неравенств. При их решении нужно следить за тем, какие преобразования выполняются при этом.

Утверждение $Q(x)$ равносильно утверждению $P(x)$, если утверждения $P(x)$ и $Q(x)$ истинны при одних и тех же значениях переменной x . Равносильность уравнений означает, что они имеют одни и те же корни, а равносильность неравенств — то, что они имеют одни и те же решения. Равносильность утверждений $P(x)$ и $Q(x)$ обозначают $P(x) \equiv Q(x)$.

Утверждение $Q(x)$ следует из утверждения $P(x)$, если утверждение $Q(x)$ истинно при всех значениях переменной x , при которых истинно утверждение $P(x)$. Следование второго уравнения из первого означает, что каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения, но второе уравнение может иметь и дополнительные корни. Так же понимается и следование одного неравенства из другого. Следование утверждения $Q(x)$ из утверждения $P(x)$ обозначают $P(x) \Rightarrow Q(x)$.

Отношения равносильности и следования связаны:

$P(x) \equiv Q(x)$ означает, что $P(x) \Rightarrow Q(x)$ и $Q(x) \Rightarrow P(x)$.

При решении иррациональных уравнений используют прием возведения левой и правой частей уравнения в одну степень.

Теорема 9. Возведение левой и правой частей уравнения в нечетную натуральную степень дает уравнение, равносильное данному, а возведение в четную степень — уравнение, являющееся следствием данного уравнения.

Доказательство. Пусть a — корень уравнения $f(x) = g(x)$. Тогда истинно числовое равенство $f(a) = g(a)$. Возведя его в степень n , по соответствующему свойству числовых равенств получим равенство $f^n(a) = g^n(a)$, которое также истинно. А это означает, что число a — корень уравнения $f^n(x) = g^n(x)$.

Поскольку каждый корень уравнения $f(x) = g(x)$ является корнем уравнения $f^n(x) = g^n(x)$, то из уравнения $f(x) = g(x)$ следует уравнение $f^n(x) = g^n(x)$.

Пусть n — нечетное натуральное число и b — корень уравнения $f^n(x) = g^n(x)$. Тогда истинно числовое равенство $f^n(b) = g^n(b)$. Извлекая из обеих его частей корень степени n , по соответствующему свойству числовых равенств получим числовое равенство $f(b) = g(b)$, которое истинно. Значит, число b — корень уравнения $f(x) = g(x)$.

Поскольку при нечетном натуральном n из уравнения $f(x) = g(x)$ следует уравнение $f^n(x) = g^n(x)$ и из уравнения $f^n(x) = g^n(x)$ следует уравнение $f(x) = g(x)$, то эти уравнения равносильны.

Пример 1. Решим уравнение $3 - \sqrt{2a^2 - 7a - 3} = a$.

Данное уравнение равносильно уравнению

$3 - a = \sqrt{2a^2 - 7a - 3}$. Возведем обе его части в квадрат и приведем подобные:

$$9 - 6a + a^2 = 2a^2 - 7a - 3; a^2 - a - 12 = 0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет корнями числа -3 и 4 . Сделаем проверку. Подставив числа -3 и 4 в данное уравнение, получим числовые равенства

$$3 - \sqrt{2 \cdot (-3)^2 - 7 \cdot (-3) - 3} = -3 \text{ и } 3 - \sqrt{2 \cdot 4^2 - 7 \cdot 4 - 3} = 4,$$

из которых истинно только первое равенство.

Ответ. -3 .

Этот пример иллюстрирует ту часть теоремы 9, в которой утверждается, что возведение в четную степень обеих частей уравнения дает уравнение, которое является следствием данного уравнения. Появление постороннего корня 4 связано с тем, что возведением в квадрат к уравнению $9 - 6a + a^2 = 2a^2 - 7a - 3$ приводит не только данное уравнение, но и уравнение $3 + \sqrt{2a^2 - 7a - 3} = a$, которое и имеет корнем число 4 .

Вообще, при решении уравнений нужно быть внимательным к выполняемым преобразованиям. Полученные в результате решения числа включаются в ответ только в случае, когда все преобразования были преобразованиями равносильности.

Пример 2. Решим уравнение $3 - a = \sqrt{2a^2 - 7a - 3}$, используя только преобразования равносильности:

$$\begin{aligned} 3 - a &= \sqrt{2a^2 - 7a - 3} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} 2a^2 - 7a - 3 \geq 0, \\ 3 - a \geq 0, \\ (3 - a)^2 = 2a^2 - 7a - 3 \end{cases} \equiv \begin{cases} a \leq 3, \\ a^2 - a - 12 = 0 \end{cases} \equiv a = -3. \end{aligned}$$

Некоторые иррациональные уравнения могут быть решены приемом *введения вспомогательных переменных*.

Пример 3. Решим уравнение $c^2 - 3c = 7 - \sqrt{c^2 - 3c + 5}$.

Обратим внимание на то, что данное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{c^2 - 3c + 5} = -(c^2 - 3c - 7)$, в котором выражение $c^2 - 3c$ повторяется. Это наводит на мысль, что его или выражение, его содержащее, целесообразно рассматривать в качестве новой переменной. Обозначим через t , например, выражение $c^2 - 3c - 7$, т. е.

$$c^2 - 3c - 7 = t.$$

Тогда $c^2 - 3c + 5 = (c^2 - 3c - 7) + 12 = t + 12$.

Это позволяет данное уравнение заменить уравнением $\sqrt{t + 12} = -t$. Решим его:

$$\begin{aligned} \sqrt{t + 12} = -t &\equiv \begin{cases} t + 12 = t^2, \\ -t \geq 0, \\ t + 12 \geq 0 \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} t^2 - t - 12 = 0, \\ t \leq 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} (t + 3)(t - 4) = 0, \\ t \leq 0 \end{cases} \equiv t = -3. \end{aligned}$$

Вернемся к исходной переменной:

$$c^2 - 3c - 7 = -3.$$

Полученное уравнение имеет корнями числа -1 и 4 . Они и являются корнями исходного уравнения.

Ответ. -1 ; 4 .

Иногда бывает удобно ввести *две вспомогательные переменные*.

Пример 4. Решим уравнение $\sqrt[3]{28 - y} + \sqrt[3]{7 + y} = 5$.

Обозначим u и v первый и второй радикалы соответственно:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{28 - y} = u, \\ \sqrt[3]{7 + y} = v. \end{cases} \quad (1)$$

Тогда данное уравнение запишется как

$$u + v = 5.$$

Из системы (1) получим еще одно уравнение, связывающее переменные u и v :

$$\begin{cases} 28 - y = u^3, \\ 7 + y = v^3, \end{cases} \text{ откуда } u^3 + v^3 = 35.$$

Таким образом, для нахождения значений переменных u и

v получилась система $\begin{cases} u + v = 5, \\ u^3 + v^3 = 35, \end{cases}$ которая решается так:

$$\begin{aligned} \begin{cases} u + v = 5, \\ u^3 + v^3 = 35 \end{cases} &\equiv \begin{cases} u + v = 5, \\ (u + v)(u^2 - uv + v^2) = 35 \end{cases} \equiv \begin{cases} u + v = 5, \\ u^2 + uv - v^2 = 7 \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} u + v = 5, \\ (u^2 + 2uv + v^2) - 3uv = 7 \end{cases} \equiv \begin{cases} u + v = 5, \\ (u + v)^2 - 3uv = 7 \end{cases} \equiv \begin{cases} u + v = 5, \\ 25 - 3uv = 7 \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} u + v = 5, \\ uv = 6 \end{cases} \equiv (u; v) = (2; 3) \text{ или } (u; v) = (3; 2). \end{aligned}$$

Теперь, чтобы найти значения исходной переменной, достаточно решить любое из уравнений системы (1).

Для $v = 3$, а затем для $v = 2$ получим соответственно:

$$\sqrt[3]{7 + y} = 3 \equiv 7 + y = 27 \equiv y = 20; \quad \sqrt[3]{7 + y} = 2 \equiv 7 + y = 8 \equiv y = 1.$$

Анализ выполненных преобразований показывает, что все они являются преобразованиями равносильности. Поэтому оба полученных значения переменной y являются корнями данного уравнения.

Ответ. 1; 20.

При решении иррациональных неравенств нужно учитывать, что проверка подстановкой найденного множества чисел обычно невозможна из-за его бесконечности. Поэтому при решении неравенств нужно следить за равносильностью проводимых преобразований.

Теорема 10. Верны следующие равносильности:

$$\text{а) } \sqrt{f(x)} < g(x) \equiv \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x); \end{cases}$$

$$\text{б) } \sqrt{f(x)} > g(x) \equiv \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x); \end{cases}$$

$$\text{в) } \sqrt{f(x)} \leq g(x) \equiv \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^2(x); \end{cases}$$

$$\text{г) } \sqrt{f(x)} \geq g(x) \equiv \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x); \\ g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Доказательство проводится по схеме, использованной при доказательстве теоремы 9 с применением соответствующих свойств числовых неравенств.

Пример 5. Решим неравенство $\sqrt{2t^2 + 7t + 45} \geq t - 3$.

Это неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{cases} t - 3 \geq 0, \\ 2t^2 + 7t + 45 \geq (t - 3)^2; \\ t - 3 < 0, \\ 2t^2 + 7t + 45 \geq 0. \end{cases} \right.$$

Первую систему можно заменить равносильной системой $\begin{cases} t - 3 \geq 0, \\ t^2 + 13t + 36 \geq 0, \end{cases}$ которая равносильна системе $\begin{cases} t \geq 3, \\ t \leq -9 \text{ или } t \geq -4, \end{cases}$ которая, в свою очередь, равносильна неравенству $t \geq 3$.

Вторая система совокупности равносильна системе $\begin{cases} t < 3, \\ -\infty < t < +\infty, \end{cases}$ которая равносильна неравенству $t < 3$.

Решения данного неравенства получим, когда объединим решения $t \geq 3$ и $t < 3$ первой и второй систем совокупности, в результате получим множество всех действительных чисел.

Ответ. $(-\infty; +\infty)$.

Пример 6. Решим неравенство $\sqrt{z - 1} + \sqrt{2z - 5} < \sqrt{z + 6}$.

Обратим внимание на то, что на области определения левая и правая части данного неравенства обе неотрицательны, поэтому оно равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} z - 1 \geq 0, \\ 2z - 5 \geq 0, \\ z + 6 \geq 0, \\ (z - 1) + (2z - 5) + 2\sqrt{(z - 1)(2z - 5)} < z + 6, \end{cases}$$

решение которой следующее:

$$\begin{aligned} \begin{cases} z \geq 2,5, \\ 2z^2 - 7z + 5 < (6 - z)^2 \end{cases} &\equiv \begin{cases} z \geq 2,5, \\ 6 - z \geq 0, \\ \sqrt{2z^2 - 7z + 5} < 6 - z \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} 2,5 \leq z \leq 6, \\ 2z^2 - 7z + 5 < 36 - 12z + z^2 \end{cases} \equiv \begin{cases} 2,5 \leq z \leq 6, \\ z^2 + 5z - 31 < 0 \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} 2,5 \leq z \leq 6, \\ \frac{-5 - \sqrt{149}}{2} < z < \frac{-5 + \sqrt{149}}{2} \end{cases} \equiv 2,5 \leq z < \frac{-5 + \sqrt{149}}{2}. \end{aligned}$$

Ответ. $\left[2,5; \frac{\sqrt{149} - 5}{2} \right)$.

Пример 7. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 2\sqrt{2}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2. \end{cases}$$

Обозначим m и n соответственно сумму и произведение радикалов $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = m, \\ \sqrt{x}\sqrt{y} = n. \end{cases} \quad (2)$$

Выразим $x^2 + y^2$ через m и n . Получим:

$$x + y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 2\sqrt{xy} = m^2 - 2n;$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (m^2 - 2n)^2 - 2n^2 = m^4 - 4m^2n + 2n^2.$$

С учетом этого исходная система запишется так:

$$\begin{cases} \sqrt{m^4 - 4m^2n + 2n^2} + \sqrt{2n} = 2\sqrt{2}, \\ m = 2. \end{cases}$$

Поскольку $m = 2$, то первое уравнение системы приводит-ся к уравнению $\sqrt{n^2 - 8n + 8} = 2 - n$, решив которое, получим $n = 1$.

Учитывая, что $(m; n) = (2; 1)$, из системы (2) находим, что $x = y = 1$.

Ответ. (1; 1).

Иногда при решении системы бывает полезна *тригонометрическая подстановка*.

Пример 8. Решим систему уравнений
$$\begin{cases} x + \sqrt{1 - y^2} = 1, \\ y + \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что модули переменных x и y не превышают 1. Поэтому можно ввести вспомогательные переменные u и v :

$$\begin{cases} x = \cos u, & 0 \leq u \leq \pi, \\ y = \sin v, & -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Выразим через них исходную систему и найдем ее решения:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \cos u + \cos v = 1, \\ \sin u + \sin v = \sqrt{3} \end{cases} \equiv \begin{cases} 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} = 1, \\ 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} = \sqrt{3} \end{cases} \equiv \\ & \stackrel{(1)}{\equiv} \begin{cases} 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} = 1, \\ \operatorname{tg} \frac{u+v}{2} = \sqrt{3} \end{cases} \stackrel{(2)}{\equiv} \begin{cases} \cos \frac{u-v}{2} = 1, \\ \frac{u+v}{2} = \frac{\pi}{3} \end{cases} \equiv \begin{cases} \frac{u-v}{2} = 0, \\ \frac{u+v}{2} = \frac{\pi}{3} \end{cases} \equiv u = v = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

При переходе (1) мы покомпонентно второе уравнение разделили на первое, при переходе (2) учли то, что поскольку

$-\frac{\pi}{4} \leq \frac{u+v}{2} \leq \frac{3\pi}{4}$, то уравнение $\operatorname{tg} \frac{u+v}{2} = \sqrt{3}$ имеет корнем число $\frac{\pi}{3}$, но $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, поэтому первое уравнение записывается в виде $\cos \frac{u-v}{2} = 1$.

Вернувшись к исходным переменным, получим, что $x = \frac{1}{2}$ и $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ. $(x, y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1. С помощью каких действий образуется рациональное выражение; иррациональное выражение; трансцендентное выражение? Как эти виды выражений связаны с действием возведения в степень?
2. Какие уравнения или неравенства называют рациональными; иррациональными; трансцендентными? Приведите примеры таких уравнений и неравенств.
3. Какие утверждения называют равносильными? Что означает равносильность уравнений; неравенств?
4. Что означает следование одного утверждения из другого? Что означает следование одного уравнения из другого; следование одного неравенства из другого?
5. Сформулируйте утверждение о возведении левой и правой частей уравнения в нечетную натуральную степень; в четную натуральную степень.
6. Какой системе неравенств равносильно неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$; неравенство $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$?
7. Какой совокупности систем неравенств равносильно неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$; неравенство $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$?
8. Какие приемы используются при решении иррациональных уравнений; неравенств?

362. Есть выражения:

- | | | |
|---|---|--|
| (1) $2x^2 - 5x + 7$; | (5) $2x^{\frac{1}{2}} + 5x^2 - 4$; | (9) $3x^{-2} - 5x^2 - 4$; |
| (2) $3x^2 + x^{\frac{3}{5}} - 3$; | (6) $\frac{3}{x^2} - 5x - 4$; | (10) $x + \cos x - 4$; |
| (3) $\sqrt[3]{x} + x - 3$; | (7) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3$; | (11) $\frac{x^2 - 4}{x^3 + 5} - 3$; |
| (4) $x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + 1$; | (8) $x^{\sin 3} + x^2 - 3$; | (12) $\frac{\operatorname{ctg} x}{x^{\cos 5}} + 4 \operatorname{tg} x$. |

Укажите, какие из них являются:

- рациональными;
- иррациональными;
- трансцендентными.

363. Определите, равносильны ли уравнения:

- $3a - 7 = 5a + 5$ и $2a + 12 = 0$;
- $\frac{1}{5}(2x - 1) = 1$ и $\frac{3x - 1}{8} = 1$;
- $t^2 - 1 = 0$ и $2^{t-1} = 0$;
- $|2x - 1| = 3$ и $2x - 1 = 3$;
- $(c - 5)^2 = 3(c - 5)$ и $c - 5 = 3$;

- е) $z^2 - 3z + 2 = 0$ и $z^2 + 3z + 2 = 0$;
 ж) $|u - 2| = -3$ и $3^u = (-1)^3$;
 з) $\frac{3y-2}{3} - \frac{4-y}{2} - \frac{3y-5}{6} = 2y-2$ и $2y+3 = \frac{10}{3}$.

364. Определите, равносильны ли уравнения или неравенства:

- а) $2x - 1 \geq 2$ и $2(x - 1) \geq 1$;
 б) $(t - 1)(t + 2) < 0$ и $t^2 + t < 2$;
 в) $2d - 1 = 4 - 1,5d$ и $3,5d - 5 = 0$;
 г) $u(u - 1) = 2u + 5$ и $u^2 - 3u - 5 = 0$;
 д) $(a - 2)(a + 1) < 3a + 3$ и $a - 2 < 3$;
 е) $b(b + 3) \geq 2b$ и $b^2(b + 3) \geq 2b^2$;
 ж) $2^{3v+1} = 2^{-3}$ и $3v + 1 = -3$;
 з) $\sqrt{y+2} = 3$ и $y + 2 = 9$.

365. Установите, какое из двух уравнений является следствием другого:

- а) $v - 3 = 0$ и $v^2 - 5v + 6 = 0$;
 б) $|x| = \sqrt{5}$ и $\sqrt{x^2} = 5$;
 в) $\frac{y^2 - 3y + 2}{y - 1} = 0$ и $y^2 - 3y + 2 = 0$;
 г) $\frac{a-2}{a+3} = \frac{a-3}{a+2}$ и $(a - 2)(a + 2) = (a - 3)(a + 3)$.

366. Определите, какое из двух неравенств является следствием другого:

- а) $x > y$ и $x^2 > y^2$; д) $b > 4$ и $b > 2$;
 б) $x^5 > y^5$ и $x > y$; е) $b > 4$ и $b \geq 4$;
 в) $a > 0$ и $a^2 > 0$; ж) $u > 0$ и $\sqrt[8]{u} > 0$;
 г) $a > 0$ и $a^7 > 0$; з) $u > 2$ и $\sqrt[9]{u} > \sqrt[9]{2}$.

367. Определите, верно ли утверждение:

- а) $f^2(x) = g^2(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$;
 б) $f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) \cdot x = g(x) \cdot x$;
 в) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$;
 г) $f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) + \sqrt{1 - x^2} = g(x) + \sqrt{1 - x^2}$;
 д) $f(x) = g(x) \Rightarrow |f(x)| = |g(x)|$.

368. Есть уравнения:

- (1) $\sqrt{x+2} = |x|$; (4) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$; (7) $\frac{x}{x-1} = \frac{x+5}{x+9}$;
(2) $x + \frac{1}{x} = 2$; (5) $x = x^2$; (8) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 0$.
(3) $\sqrt{x+2} = \sqrt{2-x}$; (6) $x^2 + \frac{4}{x^2} = 5$;

Укажите все пары уравнений, для которых выполняется условие:

- а) $P(x) \Rightarrow Q(x)$; б) $P(x) \equiv Q(x)$.

369. Решите уравнение:

- а) $4\sqrt{k+6} = k+1$; в) $c-5 = \sqrt{c+1}$; д) $\sqrt{2a-7} = a-21$;
б) $\sqrt{12-k} = k$; г) $\sqrt{4-y} = y+2$; е) $\sqrt{f-2} = f-4$.

370. Решите уравнение:

- а) $\sqrt{x+2} = 2 + \sqrt{x-6}$; г) $\sqrt{y} + \sqrt{25-y} = 5$;
б) $2 + \sqrt{a-7} = \sqrt{a+1}$; д) $\sqrt{b} + \sqrt{16-b} = 4$;
в) $\sqrt{d+20} = 3 + \sqrt{d-1}$; е) $\sqrt{t} + 2 = \sqrt{t+4}$.

371. Решите уравнение:

- а) $2\sqrt{z+18} = 15 - \sqrt{4z-3}$; в) $\sqrt{2n+2} = 1 - \sqrt{2n+1}$;
б) $\sqrt{22-c} = 2 + \sqrt{10-c}$; г) $2\sqrt{1-h} = \sqrt{16-4h} - 2$.

372. Решите уравнение:

- а) $\frac{8}{\sqrt{10-x}} - \sqrt{10-x} = 2$; г) $\sqrt{z+3} + \frac{4}{\sqrt{z+3}+3} = 2$;
б) $\frac{3}{\sqrt{3-c}+1} + 2\sqrt{3-c} = 5$; д) $\sqrt{\frac{2-v}{2+v}} - 4\sqrt{\frac{2+v}{2-v}} = -3$;
в) $\sqrt{\frac{2b+1}{b-1}} - 2\sqrt{\frac{b-1}{2b+1}} = 1$; е) $\sqrt{\frac{n+1}{1-n}} - \sqrt{\frac{1-n}{n+1}} = \frac{3}{2}$.

373. Решите уравнение:

- а) $\sqrt{n^2+3n+5} + n^2 = 3n+7$; в) $c\sqrt{c^2+15} - \sqrt{c}\sqrt[4]{c^2+15} = 2$;
б) $\sqrt{b^3+8} + \sqrt[4]{b^3+8} = 6$; г) $d^2 + \sqrt{d^2+20} = 22$;

- д) $m^2 - 4m - 6 = \sqrt{2m^2 - 8m + 12}$;
 е) $\sqrt{c^2 + c + 7} + \sqrt{c^2 + c + 2} = \sqrt{3c^2 + 3c + 19}$;
 ж) $(p + 4) \cdot (p + 1) - 3\sqrt{p^2 + 5p + 2} = 6$;
 з) $q^2 - 3q - 5\sqrt{9q^2 + q - 2} = -18 - \frac{28}{9}q$.

374. Решите уравнение:

- а) $\sqrt{4x^2 - 1} + x = |x - 2|$; в) $\sqrt{2t^2 - 3t + 1} = |t + 1| - t$;
 б) $\sqrt{4 - c^2} - 2c = |2 - c|$; г) $\sqrt{1 - p - p^2} = p - |p - 1|$.

375. Решите уравнение:

- а) $\sqrt{3a - 5} - \sqrt{a - 2} = 1$;
 б) $\sqrt{b + 1} - \sqrt{9 - b} = \sqrt{2b - 12}$;
 в) $\sqrt{2c + 5} + \sqrt{5c + 6} = \sqrt{12c + 25}$;
 г) $\sqrt{d - 2} + \sqrt{d + 3} = 2$;
 д) $\sqrt{m} - \sqrt{m + 1} + \sqrt{m + 9} - \sqrt{m + 4} = 0$;
 е) $\sqrt{4 - 2n} + \sqrt{2 + n} = 2\sqrt{2}$;
 ж) $\sqrt{p - 1} - \sqrt{3 - p} = 1$;
 з) $\sqrt{2q} + \sqrt{6q^2 + 1} = q + 1$.

376. Решите систему уравнений:

- а) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{x + y} = 4, \\ y - x = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \sqrt{2c + b + 1} - \sqrt{c + b} = 1, \\ 3c + 2b = 4; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} \sqrt{z} - \sqrt{y} = \frac{3}{2}\sqrt{zy}, \\ z + y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{a + b} + \sqrt{a - b} = 3, \\ a + b = 4. \end{cases}$

377. Решите систему уравнений:

- а) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}, \\ x + y = 10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \sqrt{\frac{t}{n}} - \sqrt{\frac{n}{t}} = \frac{3}{2}, \\ t - n = 3; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} \sqrt{\frac{3d - 2y}{2d}} + \sqrt{\frac{2d}{3d - 2y}} = 2, \\ d - y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{\frac{u + 1}{v}} + \sqrt{\frac{v}{u + 1}} = 2, \\ u + v = 11. \end{cases}$

378. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{14-x} > 2-x$; в) $\sqrt{9d-20} \geq d$; д) $\sqrt{c+6} \leq c$;
б) $\sqrt{v+78} \leq v+6$; г) $7\sqrt{t-42} < t$; е) $2\sqrt{m+48} \geq m$.

379. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{x^2-4x} > x-3$; е) $\sqrt{b+3} - \sqrt{b-4} \geq 2$;
б) $\sqrt{3y^2-22y} > 2y-7$; ж) $\sqrt{c-1} + \sqrt{c+2} \leq 1$;
в) $\sqrt{z^2-5z+6} \leq z+4$; з) $\sqrt{3d+1} + \sqrt{d-4} - \sqrt{4d+5} < 0$;
г) $\sqrt{2t^2+7t+50} \geq t-3$; и) $2\sqrt{m+1} - \sqrt{m-1} \geq 2\sqrt{m-3}$;
д) $\sqrt{a+1} - \sqrt{a-2} \leq 1$; к) $\sqrt{n-3} + \sqrt{1-n} > \sqrt{8n-5}$.

380. Решите неравенство или уравнение:

- а) $\frac{2}{2+\sqrt{4-m^2}} + \frac{1}{2-\sqrt{4-m^2}} > \frac{1}{m}$;
б) $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 1$;
в) $\sqrt{y-2\sqrt{y-1}} + \sqrt{y+3-4\sqrt{y-1}} = 1$;
г) $\sqrt{z+2+2\sqrt{z+1}} + \sqrt{z+2-2\sqrt{z+1}} = 2$;
д) $\sqrt{t+19-8\sqrt{t+3}} - \sqrt{t+7-4\sqrt{t+3}} = 2$.

381. На координатной плоскости представьте множество точек, заданное неравенством:

- а) $3x-2y+6 > 0$; д) $yz \geq 1$;
б) $y-2x \geq 1$; е) $xy \leq -2$;
в) $ax > 0$; ж) $b^2-y^2 < 0$;
г) $(e-2)(e-2z) < 0$; з) $m^2+n^2 \leq 2(m-n)$.

382. На координатной плоскости представьте множество точек, заданное неравенством:

- а) $x^2 > xt+1$; в) $z \geq \frac{1}{t}$; д) $s^2+y^2 \geq s+y$;
б) $c+t \leq t^2$; г) $\frac{1}{z} + \frac{1}{t} > 0$; е) $z + \frac{1}{z} > y$.

383. Представьте графически множество точек, являющихся решениями системы неравенств:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} 2x - y + 2 > 0, \\ x + y + 1 < 0; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} a + x^2 < 0, \\ a - x^2 > 1; \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} |b + y| \geq y, \\ b - y \leq 0; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} z > 2t, \\ zt < 1; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} b^2 + y^2 < 4, \\ |b| < 1, \\ |y| > 1; \end{cases} & \text{е) } \begin{cases} c^2 + t^2 \geq 1, \\ c^2 + t^2 \leq 16. \end{cases} \end{array}$$

384. Определите, при каких значениях переменной a имеет один корень уравнение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sqrt{x+a} = x+1; & \text{в) } \sqrt{c+1} = c-a; \\ \text{б) } \sqrt{a-z} = 2-z; & \text{г) } \sqrt{2-n} = a-n. \end{array}$$

385. Решите уравнение при различных значениях переменной c :

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sqrt{4x+c} = 2x+1; & \text{г) } \sqrt{y-3} + \sqrt{y-7} = c; \\ \text{б) } \sqrt{c+u} + \sqrt{c-u} = u; & \text{д) } \sqrt{1+t+t^2} + \sqrt{1-t+t^2} = c; \\ \text{в) } 2z + cz + \sqrt{z} = 0; & \text{е) } x = c + \sqrt{x^2 + 2(c+1)x + 4c}. \end{array}$$

386. Решите уравнение при различных значениях переменной d :

$$\begin{array}{ll} \text{а) } z + \sqrt{d+\sqrt{z}} = d; & \text{в) } \sqrt{2y+d} - \sqrt{y-1} = 2; \\ \text{б) } s^2 - \sqrt{d-s} = d; & \text{г) } d\sqrt{x} - \sqrt{x+2dx\sqrt{x^2+7d^2}} = 0. \end{array}$$

387. Определите, при каких значениях переменной a имеет корни уравнение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } x + \sqrt{x} = a; & \text{г) } \sqrt{u+a} + \sqrt{u} = a; \\ \text{б) } \sqrt{v+a} = v; & \text{д) } \sqrt{z+2} - \sqrt{z-a+2} = 1; \\ \text{в) } \sqrt{\frac{t}{4}+2} = a + \sqrt{\frac{t}{4}-3}; & \text{е) } \sqrt{x^2+x+\frac{a^2}{(x-1)^2}} = x - \frac{a}{x-1}. \end{array}$$

388. Определите, при каких значениях переменной:

$$\begin{array}{l} \text{а) } c \text{ корни уравнения } \sqrt{y^2 - y - 2c^2 + 2c + 2} = \frac{y+1}{\sqrt{2}} \text{ имеют разные знаки;} \\ \text{б) } b \text{ уравнение } b - t^2 = \sqrt{b+t} \text{ имеет неотрицательные корни.} \end{array}$$

389. Определите, при каких значениях:

- а) переменной q уравнение $q - \sqrt{6z - z^2} - 8 = 3 + \sqrt{1 + 2qz - q^2 - z^2}$ имеет единственный корень;
б) переменных a, b, c уравнение $\sqrt{x + a\sqrt{x + b + \sqrt{x}}} = c$ имеет бесконечно много корней.

390. Решите неравенство при различных значениях переменной a :

- а) $2x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0$; б) $\sqrt{x - 2} + \sqrt{x - 6} < a$.

391. Выделите полный квадрат и найдите область значений функции, заданной квадратным трехчленом:

- а) $x^2 - 2x + 5$; в) $c^2 + 3c + 2$; д) $0,5a^2 - a + 2$;
б) $4b^2 - 2b - 1$; г) $2f^2 - 2f + 5$; е) $3t^2 - 5t + 1$.

392. Найдите коэффициент при x^2 у многочлена, тождественно равного выражению:

- а) $(x - 3)^3 - (2x(5 + (x - 2)^2) - 7)$;
б) $4(x - 1)(2 - x)(3 + 2x) - x(1 - 2x)^2$;
в) $(x^2 + x + 2)(x + 1) + (2x^2 - x - 1)(x - 2)$;
г) $(2x + 1)(x + 2)(x - 1) - (x + 1)(x - 2)(x - 3)$.

393. Определите, при каких целых значениях переменных a, b, c тождеством является равенство:

- а) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x - 3 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + c)$;
б) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x - 3 = (x^2 + ax - 1)(x^2 + bx + c)$;
в) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 3x - 3 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + c)$;
г) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 3x - 3 = (x^2 + ax - 1)(x^2 + bx + c)$.

394. Решите уравнение:

- а) $(x + 0,5)(x^2 - 9) = (2x + 1)(x + 3)^2$;
б) $(t - 0,3)(4t^2 - 9) = (10t - 3)(t - 1,5)^2$;
в) $(5a - 1)(2a - 5)^2 = (4a^2 - 25)(a - 0,2)$;
г) $(2l + 8)^2(13l - 39) = 26(l - 3)(4l^2 - 64)$.

395. Найдите скорости пешеходов, которые вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B , расстояние между которыми равно:

- а) 26 км, учитывая, что через 2 ч расстояние между ними сократилось до 8 км, а еще через 2 ч одному осталось пройти до B на 4 км меньше, чем другому до A ;

б) 30 км, учитывая, что они встретились через 3 ч 20 мин, а если бы первый вышел на 2 ч раньше второго, то встреча произошла бы через 2,5 ч после выхода второго.

396. Дорога из A в B состоит из трех участков — под гору, горизонтального и в гору. Определите:

а) протяженность горизонтального участка, учитывая, что с горы пешеход идет со скоростью 5 км/ч, на горизонтальном участке — со скоростью 4 км/ч, в гору — со скоростью 3 км/ч, на путь из A в B пешеход затрачивает 2 ч 54 мин, из B в A — 3 ч 6 мин, а длина дороги равна 11,5 км;

б) скорости туриста на каждом участке пути — под гору, на горизонтальном и в гору, — длины которых соответственно равны 3 км, 5 км, 6 км, учитывая, что турист затратил на то, чтобы пройти из A до середины пути и вернуться назад в A , 3 ч 36 мин, на путь от A до B — 3 ч 27 мин, а на путь от B до A — 3 ч 51 мин.

397. Определите вид треугольника, углы которого относятся как:

а) $2:3:5$; б) $3:4:8$; в) $4:5:8$.

398. Найдите углы между парами биссектрис треугольника, углы которого относятся как:

а) $2:3:5$; б) $3:4:5$; в) $3:5:10$.

399. Отрезок CD является высотой прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C . Найдите неизвестные стороны треугольника, учитывая, что:

а) $AB = 24$, $AD = 6$; в) $AC = 13$, $\operatorname{tg}(\angle ACD) = 2,4$;
б) $AD = 1,96$, $BD = 23,04$; г) $AC = 8$, $AB - BC = 2$.

400. Найдите площадь треугольника ABC , учитывая, что:

а) $AB = 3$, $AC = 4$, $\angle A = 45^\circ$; в) $AB = 11$, $AC = 12$, $BC = 17$;
б) $AB = 5$, $AC = 13$, $\angle B = 90^\circ$; г) $AB = 4$, $AC = 5$, $\angle B = 60^\circ$.

401. Точки A , B и C — соответственно середины ребра N_1N , диагонали N_1M грани N_1M_1MN и диагонали N_1L куба $MNKL M_1 N_1 K_1 L_1$. Найдите площадь сечения пирамиды N_1MNKL плоскостью ABC , учитывая, что полная поверхность куба равна 96 см^2 .

402. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды $REFGH$, каждое ребро которой равно l , плоскостью, проходящей через вершину R , середину ребра EF и параллельной диагонали GE основания, и найдите площадь сечения.

403. Точка Q — центр основания NKL правильной треугольной пирамиды $MNKL$, а точка E делит ребро ML на отрезки ME и EL , соответственно равные $\frac{13}{3}$ см и $\frac{26}{3}$ см. Докажите, что прямая QE параллельна плоскости NMK , и найдите длину отрезка QE , учитывая, что $NK = 10$ см.

404. Точки M и N — середины ребер BD и CD треугольной пирамиды $ABCD$, все ребра которой равны друг другу. Найдите косинус угла между прямыми AM и BN .

405. Есть треугольная пирамида, в основании которой лежит правильный треугольник, а боковые ребра равны друг другу. Через центр основания параллельно двум непересекающимся ребрам проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения, учитывая, что боковое ребро пирамиды равно m , а сторона основания — n .

406. Окружность касается стороны AB треугольника ABC в точке B , проходит через вершину C и пересекает сторону AC в точке D . Найдите сторону BC , учитывая, что $\angle A = 60^\circ$, $BD = 35$ см и $AC - AB = 24$ см.

407. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, биссектрисы углов B и D которого пересекаются на диагонали AC . Учтывая, что $AB = 66$, $DC = AC = 77$, найдите две остальные стороны этого четырехугольника.

408. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, одна сторона которого равна 14, прилежащий к ней угол — 45° , а площадь — 56.

* * *

409. Уравнение $x^4 + ax^3 + 29x^2 + bx + 4 = 0$ с рациональными коэффициентами имеет своим корнем число $2 + \sqrt{3}$. Найдите остальные его корни.

410. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ выбраны такие точки M и N , что $MB + BN = AB$. Докажите, что прямые DM и DN делят отрезок AC на три части, которые могут быть сторонами треугольника, один из углов которого равен 60° .

411. Учитывая, что a — определенное число, решите систему уравнений

$$\begin{cases} ax_1 = x_2 + x_5, \\ ax_2 = x_1 + x_3, \\ ax_3 = x_2 + x_4, \\ ax_4 = x_3 + x_5, \\ ax_5 = x_1 + x_4. \end{cases}$$

412. Последовательность (a_k) задана условиями $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ и $a_{k+1} = a_{k-1} + \sqrt{12a_k(a_k + 1)} + 1$ при $k > 1$. Докажите, что все члены этой последовательности, кроме первого, являются натуральными числами.

Пирамида и конус

9. Пирамида

Вы уже знакомы с **пирамидой**, т. е. многогранником, одна грань которого является многоугольником, а остальные грани-треугольники имеют общую вершину.

Треугольные грани пирамиды, имеющие общую вершину, называют **боковыми гранями**, а эту общую вершину — **вершиной** пирамиды. Ребра боковых граней, сходящиеся в вершине пирамиды, называют **боковыми ребрами** пирамиды. Многоугольник, которому не принадлежит вершина пирамиды, называют **основанием** пирамиды (рис. 107).

Пирамиды разделяют на *треугольные, четырехугольные, пятиугольные* и т. д. в зависимости от количества сторон их оснований. Пирамида, изображенная на рисунке 107, — пятиугольная, а на рисунке 108, — восьмиугольная. Треугольную пирамиду называют еще *тетраэдром*. У тетраэдра все грани являются треугольниками (рис. 109).

Перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости ее основания, называется **высотой пирамиды**. На рисунке 108 показана высота SO пирамиды $SABCDEFGH$. Основание высоты может и не принадлежать основанию пирамиды (рис. 110).

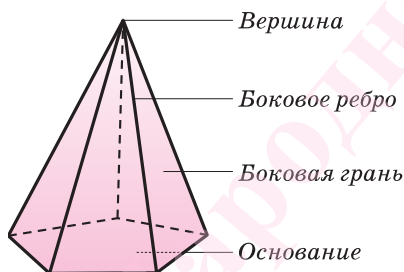


Рис. 107

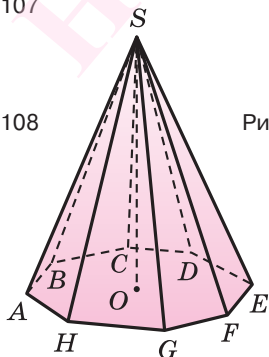


Рис. 108

Рис. 109

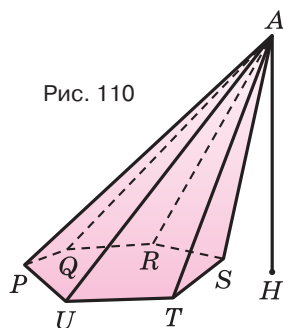
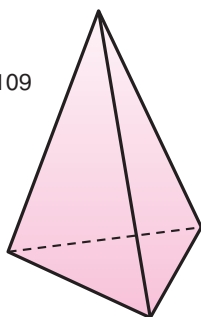


Рис. 110

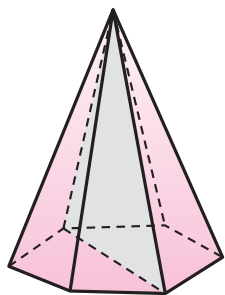


Рис. 111

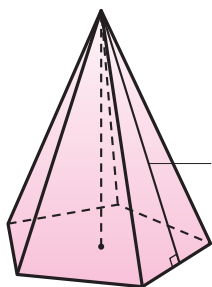


Рис. 112

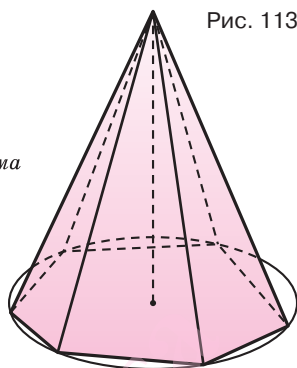


Рис. 113

Плоскость, проходящая через два боковых ребра пирамиды, не принадлежащие одной грани, называется *диагональной плоскостью*, а сечение пирамиды *диагональной плоскостью* — *диагональным сечением*. На рисунке 111 показано диагональное сечение шестиугольной пирамиды.

Пирамида, основанием которой является правильный многоугольник, а основание ее высоты совпадает с центром этого многоугольника, называется **правильной пирамидой** (рис. 112).

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется **апофемой** пирамиды.

Отметим, что в *правильной пирамиде*:

боковые ребра равны;

боковые грани равны;

апофемы равны;

двугранные углы при основании равны;

двугранные углы при боковых ребрах равны;

каждая точка высоты равноудалена от вершин основания;

каждая точка высоты равноудалена от ребер основания;

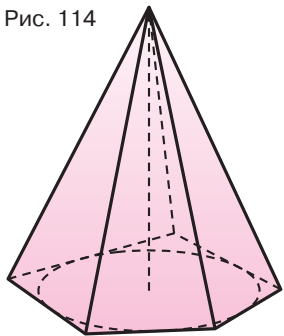
каждая точка высоты равноудалена от боковых граней.

Отметим, что если в пирамиде равны все:

боковые ребра, то около ее основания можно описать окружность, и центр этой окружности совпадает с основанием высоты пирамиды (рис. 113);

двугранные углы при основании, то в это основание можно вписать окружность, и центр этой окружности совпадает с основанием высоты пирамиды (рис. 114).

Рис. 114



Боковые грани составляют боковую поверхность пирамиды, а боковые грани вместе с основанием — полную поверхность пирамиды.

Вы знаете, что боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра ее основания и апофемы.

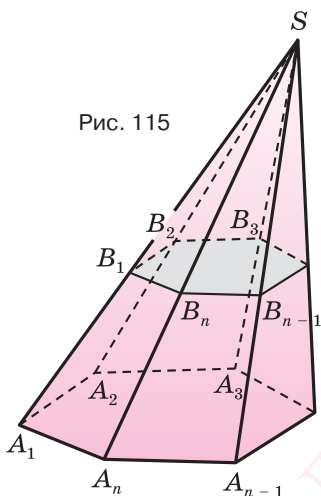
Теорема 1. Если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то:

а) боковые ребра и высота разделяются на пропорциональные части;

б) в сечении получается многоугольник, подобный основанию;

в) площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.

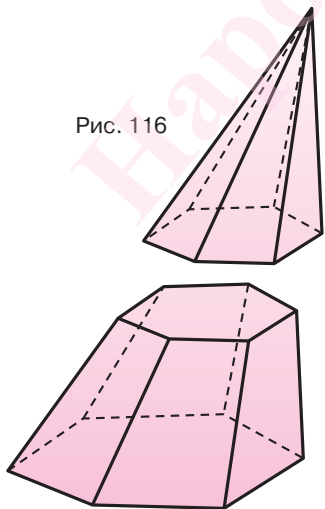
Рис. 115



Используя рисунок 115, докажи-те эту теорему самостоятельно.

Секущая плоскость, параллельная основанию пирамиды, разделяет ее на две части (рис. 116). Одна из этих частей также является пирамидой, а другая — многогранником, который называется **усеченной пирамидой**.

Рис. 116



Параллельные грани усеченной пирамиды называются ее **основаниями** (рис. 117). Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники, стороны которых попарно параллельны, поэтому ее боковые грани являются трапециями.

Высотой усеченной пирамиды называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одного основания пирамиды к плоскости другого основания.

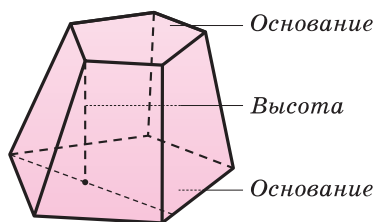


Рис. 117

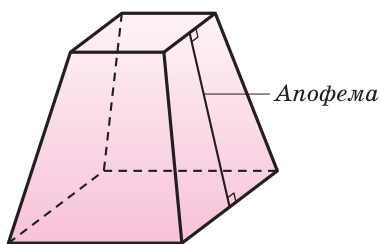


Рис. 118

Усеченная пирамида называется *правильной*, если она является частью правильной пирамиды. Высота боковой грани правильной усеченной пирамиды называется *апофемой* усеченной пирамиды. На рисунке 118 показана четырехугольная правильная усеченная пирамида и одна из ее апофем.

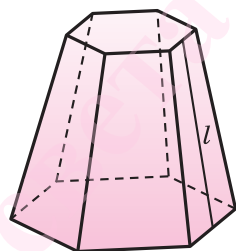


Рис. 119

Теорема 2. *Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований и апофемы:*

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) l.$$

Доказательство. Пусть есть правильная n -угольная усеченная пирамида (рис. 119). Пусть P_1 и P_2 — соответственно периметры нижнего и верхнего оснований и l — апофема пирамиды.

Боковая поверхность данной пирамиды состоит из n равных трапеций. Пусть a и b — основания одной из этих трапеций, тогда ее площадь равна $\frac{1}{2} (a + b) l$. Учитывая, что боковая поверхность пирамиды состоит из n таких трапеций, получим, что

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} (a + b) l n = \frac{1}{2} (a n + b n) l = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) l.$$

Теперь установим формулу для вычисления объема пирамиды.

Тела, имеющие равные объемы, называются *равновеликими*.

Теорема 3. *Треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами равновелики.*

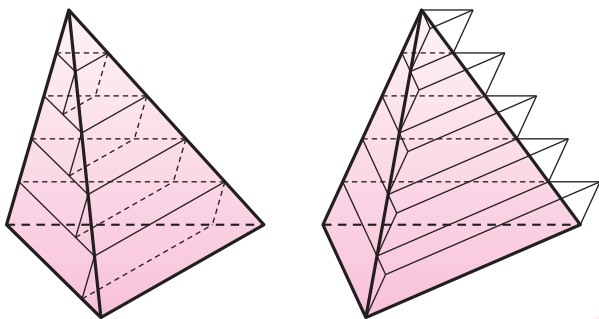


Рис. 120

▲ **Доказательство.** Пусть есть две треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами (рис. 120). Разделим высоты одной и другой пирамид на n долей и через точки деления проведем плоскости, параллельные основаниям. Этим самым пирамиды разделяются на n частей. Для каждой части первой пирамиды построим наибольшие по объему призмы, целиком содержащиеся в пирамиде, а для каждой части второй пирамиды — наименьшие по объему призмы, целиком содержащие эту часть.

Пусть V_1 и V_2 — объемы первой и второй пирамид, а Q_1 и Q_2 — суммарные объемы призм, построенных для этих пирамид. При счете от оснований пирамид призма в k -й части первой пирамиды равновелика призме для $(k+1)$ -й части второй пирамиды, так как у этих призм равновелики основания и равные высоты. Поэтому объем Q_2 больше объема Q_1 на объем первой призмы, у которой основанием является основание второй пирамиды, а высота равна $\frac{h}{n}$, где h — высота пирамиды (см. рис. 120), т. е. $Q_2 = Q_1 + S \cdot \frac{h}{n}$, или $Q_1 = Q_2 - S \cdot \frac{h}{n}$, где

S — площадь основания пирамиды. Теперь учтем, что $V_1 > Q_1$, а $V_2 < Q_2$. Поэтому $V_1 > V_2 - S \cdot \frac{h}{n}$, или $V_2 - V_1 \leq S \cdot \frac{h}{n}$. При увеличении значения переменной n значение выражения $S \cdot \frac{h}{n}$ стремится к нулю, а это означает, что $V_2 - V_1 \leq 0$, или

$$V_2 \leq V_1. \quad (1)$$

Такие же рассуждения можно провести, если первую и вторую пирамиды поменять ролями. В результате получим неравенство

$$V_1 \leq V_2. \quad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) следует, что $V_1 = V_2$. ▲

Теорема 4. Объем пирамиды равен третьей доле произведения площади ее основания и высоты:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H.$$

Доказательство. Пусть есть треугольная пирамида $QABC$ (рис. 121). Достроим ее до призмы $ABCEDQ$ с основанием ABC (рис. 122). Отделим от призмы данную пирамиду, получится четырехугольная пирамида $QBDEA$ (рис. 122 и 123). Диагональная плоскость QDA разделяет ее на две пирамиды $QDAB$ и $QDAE$, у которых одна и та же высота, проведенная из вершины Q , и равные основания ABD и AED . Поэтому, в соответствии с теоремой 3, пирамиды $QDAB$ и $QDAE$ равновелики. Сравним пирамиду $QDAE$ с данной пирамидой $QABC$. У них равные основания QDE и ABC и высоты, проведенные из вершин A и Q , поэтому эти пирамиды также равновелики. Получается, что все три пирамиды $QABC$, $QDAB$ и $QDAE$ равновелики. Поскольку объем призмы $ABCEDQ$ равен произведению SH площади S основания ABC и высоты призмы H , которая равна высоте пирамиды $QABC$, то объем пирамиды $QABC$, т. е. третьей части призмы $ABCEDQ$, равен третьей доле этого объема, т. е. $\frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$.

Пусть теперь есть произвольная пирамида $QA_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ (рис. 124). Через диагонали A_1A_3 , A_1A_4 , ..., A_1A_{n-1} основания $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$, выходящие из одной вершины A_1 , проведем диагональные сечения, они разделят данную

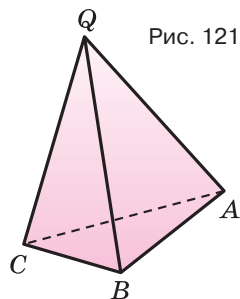


Рис. 121

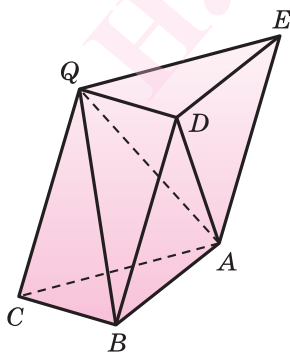


Рис. 122

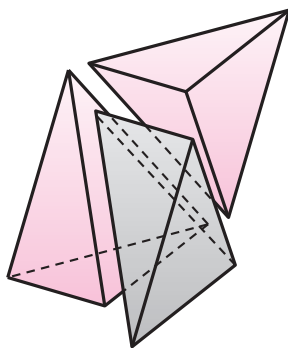


Рис. 123

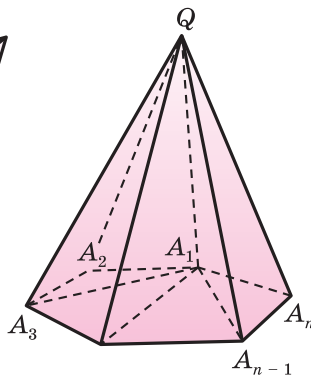
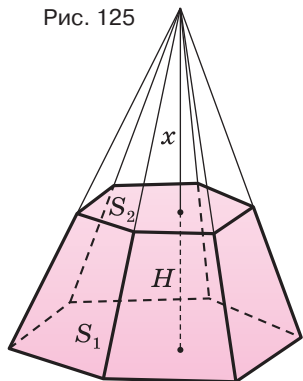


Рис. 124

пирамиду на треугольные пирамиды $QA_1A_2A_3$, $QA_1A_3A_4$, ..., $QA_1A_{n-1}A_n$. Поскольку все они имеют общую высоту H , то

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_{A_1A_2A_3} \cdot H + \frac{1}{3} S_{A_1A_3A_4} \cdot H + \dots + \frac{1}{3} S_{A_1A_{n-1}A_n} \cdot H = \\ &= \frac{1}{3} H (S_{A_1A_2A_3} + S_{A_1A_3A_4} + \dots + S_{A_1A_{n-1}A_n}) = \frac{1}{3} H \cdot S_{\text{осн}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H. \end{aligned}$$

Рис. 125



Пример. Найдем объем усеченной пирамиды, нижнее и верхнее основания которой имеют площади S_1 и S_2 , а высота равна H (рис. 125).

Для этого достроим данную усеченную пирамиду до полной. Пусть высота дополнительной пирамиды равна x . Искомый объем V можно найти как разность объемов полной и дополнительной пирамид:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_1(H+x) - \frac{1}{3} S_2x = \frac{1}{3} (S_1H + \\ &+ S_1x - S_2x) = \frac{1}{3} (S_1H + (S_1 - S_2)x). \end{aligned}$$

Чтобы найти высоту x , используем установленное в теореме 1 утверждение о том, что площади сечений пирамиды относятся как квадраты их расстояний от вершины:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{x^2}{(H+x)^2}.$$

Решим это уравнение, учитывая, что S_1 и S_2 — положительные числа:

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S_1} &= \frac{x^2}{(H+x)^2} \equiv \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} = \frac{x}{H+x} \equiv H\sqrt{S_2} + x\sqrt{S_2} = x\sqrt{S_1} \equiv \\ &\equiv H\sqrt{S_2} = x(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}) \equiv x = \frac{H\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \left(S_1H + \frac{(S_1 - S_2)H\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \right) \equiv \frac{1}{3} H \left(S_1 + \frac{(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \right) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{3} H (S_1 + (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})\sqrt{S_2}) \equiv \frac{1}{3} H (S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2). \end{aligned}$$

Таким образом, объем V усеченной пирамиды равен третьей доле произведения высоты H пирамиды и суммы площадей S_1 и S_2 оснований пирамиды и их среднего геометрического $\sqrt{S_1S_2}$: $V = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})$.

- ?
1. Какой многогранник называется пирамидой?
 2. Какую пирамиду называют тетраэдром?
 3. Какую грань пирамиды называют ее основанием и какие грани — боковыми гранями?
 4. Какие ребра пирамиды называют боковыми ребрами и какую точку — вершиной пирамиды?
 5. Какой отрезок называют высотой пирамиды?
 6. Какая плоскость называется диагональной плоскостью пирамиды и какой многоугольник — диагональным сечением пирамиды?
 7. Какая пирамида называется правильной пирамидой?
 8. Какой отрезок называется апофемой пирамиды?
 9. Сформулируйте свойства элементов правильной пирамиды: боковых ребер; боковых граней; апофем; двугранных углов при основании; двугранных углов при боковых ребрах; точек высоты.
 10. Сформулируйте свойство основания пирамиды, у которой равны все: боковые ребра; двугранные углы при основании.
 11. Что понимают под боковой поверхностью пирамиды; полной поверхностью пирамиды?
 12. Как связаны между собой боковая поверхность правильной пирамиды, периметр ее основания и апофема?
 13. Сформулируйте свойства отрезков боковых ребер и высоты пирамиды, на которые они разделяются плоскостью, параллельной основанию.
 14. Сформулируйте свойства сечения пирамиды плоскостью, параллельной основанию.
 15. Какой многогранник называется усеченной пирамидой?
 16. Какие грани усеченной пирамиды называют ее основаниями и какой отрезок — ее высотой?
 17. Какая усеченная пирамида называется правильной и какой отрезок называется апофемой правильной усеченной пирамиды?
 18. Как связаны между собой боковая поверхность правильной усеченной пирамиды, периметры ее оснований и апофема?
 19. Какие тела называют равновеликими?
 20. Какое свойство имеют треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами?
 21. Чему равен объем пирамиды?

413. Установите, сколько вершин, ребер и граней имеет:

- а) n -угольная пирамида;
б) усеченная n -угольная пирамида.

414. В правильной пирамиде найдите точку, равноудаленную от всех ее:

- а) вершин; б) ребер; в) граней.

415. Есть правильная пирамида. Можно ли утверждать, что она имеет плоскость симметрии?

416. Найдите площадь диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды, у которой:

- а) боковое ребро равно b и составляет с плоскостью основания угол α ;
- б) сторона основания равна a , а двугранный угол при основании — α .

417. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a , а боковое ребро — $2a$. Найдите:

- а) площадь каждого диагонального сечения;
- б) угол между боковым ребром и основанием.

418. Докажите, что в правильной пирамиде:

- а) боковые ребра равны;
- б) боковые грани равны;
- в) апофемы равны;
- г) двугранные углы при основании равны;
- д) двугранные углы при боковых ребрах равны;
- е) каждая точка высоты равноудалена от вершин основания;
- ж) каждая точка высоты равноудалена от ребер основания;
- з) каждая точка высоты равноудалена от боковых граней.

419. Докажите, что если в пирамиде равны все:

- а) боковые ребра, то около ее основания можно описать окружность, и центр этой окружности совпадает с основанием высоты пирамиды;
- б) двугранные углы при основании, то в это основание можно вписать окружность, и центр этой окружности совпадает с основанием высоты пирамиды.

420. Докажите, что боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра ее основания и апофемы.

421. Докажите, что если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то:

- а) боковые ребра и высота разделятся на пропорциональные части;
- б) в сечении получится многоугольник, подобный основанию;
- в) площади сечения и основания будут относиться как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.

422. Докажите, что в правильной усеченной пирамиде:

- а) боковые ребра равны;
- б) боковые грани равны;
- в) апофемы равны;
- г) двугранные углы при основании равны;
- д) двугранные углы при боковых ребрах равны;
- е) сумма двугранных углов при параллельных ребрах одной боковой грани равна 180° .

423. Боковые ребра пирамиды равны друг другу. Определите, может ли основание пирамиды быть:

- а) ромбом;
- б) прямоугольником;
- в) трапецией;
- г) правильным шестиугольником.

424. Есть пирамида, у которой двугранные углы при основании равны друг другу. Докажите, что:

- а) высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание;
- б) высоты всех боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, равны;
- в) боковая поверхность равна произведению полупериметра основания и высоты боковой грани, проведенной из вершины пирамиды.

425. Сечение пирамиды, параллельное ее основанию, делит высоту в отношении $2 : 3$, если считать от вершины. Найдите его площадь, учитывая, что она на 105 см^2 меньше площади основания.

426. Найдите высоту пирамиды, стороны основания которой равны 13, 14 и 15, учитывая, что:

- а) все боковые ребра составляют с основанием углы, равные α ;
- б) все боковые грани составляют с основанием углы, равные β .

427. Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 13 см, а одна из диагоналей — 10 см. Найдите боковые ребра пирамиды, учитывая, что ее высота проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 35 см.

428. Прямоугольный треугольник ABC , гипотенуза AB и катет AC которого соответственно равны 29 см и 21 см, является основанием пирамиды $DABC$. Ее ребро DA перпендикулярно плоскости основания и равно 20 см. Найдите боковую поверхность пирамиды.

429. В основании пирамиды лежит параллелограмм со сторонами 60 см и 108 см и площадью 3240 см^2 , точка пересечения диагоналей которого является основанием высоты пирамиды. Найдите боковую поверхность пирамиды, учитывая, что ее высота равна 36 см.

430. Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами основания 6 см и 14 см и одной из диагоналей 12 см, а ее высота проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 8 см. Найдите боковые ребра пирамиды.

431. Есть пирамида с квадратным основанием. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно плоскости основания, а один из двугранных углов при основании равен 45° . Учитывая, что наибольшее боковое ребро равно 12 см, найдите:

- а) высоту пирамиды;
- б) боковую поверхность пирамиды.

432. Найдите апофему и высоту правильной усеченной треугольной пирамиды, у которой стороны оснований равны 15 см и 5 см, а боковое ребро — 13 см.

433. Найдите площадь диагонального сечения правильной усеченной четырехугольной пирамиды, у которой стороны оснований равны a и b , а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α .

434. Прямоугольник с диагональю 24 см является основанием пирамиды, плоскости двух боковых граней которой перпендикулярны плоскости основания, а плоскости двух других боковых граней образуют с основанием углы в 30° и 45° . Найдите поверхность пирамиды.

435. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 24 см, 20 см и 20 см, а каждая боковая грань наклонена к основанию под углом в 45° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

436. Учитывая, что высота треугольной пирамиды равна 40 см, высота каждой боковой грани, проведенная из вершины пирамиды, — 41 см, а периметр основания — 42 см, докажите, что высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в ее основание, и найдите площадь этого основания.

437. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 20 см. Боковые ребра пирамиды равны друг другу, а ее высота равна 24 см. Найдите боковое ребро пирамиды.

438. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с углом в 120° , а боковые ребра образуют с ее высотой, равной 16 см, углы в 45° . Найдите площадь основания пирамиды.

439. Равнобедренная трапеция с основаниями 6 см и $4\sqrt{6}$ см и высотой 5 см является основанием пирамиды, каждое боковое ребро которой равно 13 см. Найдите высоту пирамиды.

440. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , а ее высота — H . Найдите:

- а) боковое ребро пирамиды;
- б) плоский угол при вершине пирамиды;
- в) угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды;
- г) угол между боковой гранью и основанием пирамиды;
- д) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

441. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды имеет длину 12 см и образует угол в 60° с плоскостью основания. Найдите поверхность пирамиды.

442. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна l , а плоский угол при вершине — α . Найдите:

- а) высоту пирамиды;
- б) боковое ребро;
- в) угол между боковой гранью и плоскостью основания;
- г) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

443. Найдите боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, учитывая, что сторона ее основания равна a , а площадь боковой грани равна площади сечения, проведенного через вершину пирамиды и большую диагональ основания.

444. Все двугранные углы при основании пирамиды равны φ . Докажите, что $S_{\text{бок}} = \frac{Q}{\cos \varphi}$, $S_{\text{полн}} = \frac{2Q \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi}$, где $S_{\text{бок}}$ и $S_{\text{полн}}$ — боковая и полная поверхности пирамиды, Q — площадь ее основания.

445. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 63 см, апофема — 65 см, а стороны оснований относятся как 7 : 3. Найдите эти стороны.

446. Плоскость, параллельная основанию правильной четырехугольной пирамиды, делит высоту пирамиды в отношении 1 : 2, если считать от вершины. Апофема полученной усеченной пирамиды равна 4 дм, а ее полная поверхность — 186 дм². Найдите высоту усеченной пирамиды.

447. Основаниями усеченной пирамиды являются правильные треугольники со сторонами 5 см и 3 см, а одно из ее боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 1 см. Найдите боковую поверхность пирамиды.

448. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 5 м и 8 м, а высота — 3 м. Плоскость проходит через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания. Найдите площадь сечения и двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

449. Найдите объем пирамиды с высотой h , учитывая, что:

- а) $h = 20$ см, а основанием является квадрат со стороной 30 см;
- б) $h = 22$ м, а основанием является треугольник ABC , в котором $AB = 2$ м, $BC = 1,35$ м, $\angle ABC = 30^\circ$.

450. Найдите поверхность и объем правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 8 см, а высота — 20 см.

451. Найдите боковую поверхность и объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 см, а высота — 12 см.

452. Все боковые грани пирамиды $SABC$ наклонены к основанию под углом 45° . Найдите объем пирамиды, учитывая, что $AC = 15$ см, $BC = 8$ см, $\angle ACB = 60^\circ$.

453. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой:

- а) высота равна h , а двугранный угол при основании — α ;
- б) сторона основания равна a , а плоский угол при вершине — α ;

- в) сторона основания равна a , а двугранный угол при боковом ребре — α ;
- г) радиус окружности, вписанной в боковую грань, равен r , а острый плоский угол при одной из вершин основания — α ;
- д) высота равна H , а двугранный угол при основании — β ;
- е) сторона основания равна m , а плоский угол при вершине — α ;
- ж) боковое ребро равно l и составляет с плоскостью основания угол φ .

454. Квадрат является основанием пирамиды, две ее грани перпендикулярны основанию, двугранный угол между противоположающимися боковыми гранями равен α , а высота пирамиды — h . Найдите объем, боковую и полную поверхности пирамиды.

455. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, у которой:

- а) боковое ребро равно b и составляет с плоскостью основания угол α ;
- б) боковое ребро равно b и составляет с прилежащей стороной основания угол α ;
- в) радиус окружности, описанной около боковой грани, равен R , а плоский угол при вершине — α ;
- г) высота равна 15 см, а сторона основания — 12 см;
- д) боковое ребро равно l и составляет с плоскостью основания угол φ ;
- е) боковое ребро равно l и составляет с прилежащей стороной основания угол α ;
- ж) боковое ребро равно l , а плоский угол при вершине — β ;
- з) плоский угол при вершине равен φ , а сторона основания — a .

456. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны 25 см, а третья сторона — 48 см. Найдите объем пирамиды, учитывая, что каждое ее боковое ребро равно 105 см.

457. Найдите объем и боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, учитывая, что ее боковое ребро равно 37 см, а диаметр круга, вписанного в основание, — 24 см.

458. Найдите объем пирамиды, основанием которой является:

- а) равнобедренный треугольник ABC с боковыми сторонами AB и BC , равными 26 см, и основанием AC , равным 20 см, а каждое боковое ребро пирамиды образует с ее высотой угол в 30° ;
- б) прямоугольный треугольник с катетами a и b , а каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом φ ;
- в) ромб со стороной 15 см, каждый из двугранных углов при основании равен 45° , а высота пирамиды равна 6 см.

459. Основание четырехугольной пирамиды — прямоугольник с диагональю b и углом α между диагоналями. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом. Найдите этот угол, учитывая, что объем пирамиды равен V .

460. Найдите объем треугольной пирамиды $QABC$, учитывая, что:

- а) $\angle CAB = 90^\circ$, $BC = c$, $\angle ABC = \varphi$ и каждое боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α ;
- б) $AB = 12$ см, $BC = CA = 10$ см и двугранные углы при основании равны 45° ;
- в) боковые ребра попарно перпендикулярны и имеют длины a , b и c .

461. Основанием пирамиды $IJKL$ является треугольник, в котором $JK = 20$ см, $JL = 29$ см, $KL = 21$ см. Грани IJK и IJL перпендикулярны плоскости основания, а грань IKL составляет с ней угол в 60° . Найдите объем пирамиды.

462. Одно ребро тетраэдра равно 12 см, а остальные ребра — 9 см каждое. Найдите объем тетраэдра.

463. Одна из сторон основания треугольной пирамиды равна 16 см, противолежащее ей боковое ребро — 18 см, каждое из четырех остальных ребер — 17 см. Найдите объем пирамиды.

464. Определите, как изменится площадь боковой, полной поверхностей и объем пирамиды, если, оставив углы прежними, все ее ребра:

- а) увеличить в 2 раза;
- б) уменьшить в 5 раз.

465. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 24 дм и 10 дм, а каждое боковое ребро равно 85 дм. Пирамида пересечена плоскостью, которая параллельна плоскости основания и делит боковое ребро пополам. Найдите объемы полученных частей пирамиды.

466. Кристалл кварца состоит из правильной шестиугольной призмы с боковым ребром 6,2 см и стороной основания 1,7 см и двух правильных шестиугольных пирамид с боковым ребром 2,5 см. Найдите массу кристалла, учитывая, что плотность кварца равна $2,7 \text{ г/см}^3$.

467. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7 см, а стороны оснований — 10 см и 2 см. Найдите боковое ребро пирамиды, ее диагональ и объем.

468. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 4 см и 10 см, а площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, равна 42 см^2 . Найдите объем пирамиды.

469. Найдите объемы частей пирамиды, на которые она рассечена плоскостью, параллельной основанию, учитывая, что:

а) это основание и полученное сечение являются равнобедренными прямоугольными треугольниками с гипотенузами m и n , две боковые грани, содержащие катеты, перпендикулярны основанию, а третья составляет с ней угол φ ;

б) пирамида правильная четырехугольная, стороны основания и полученного сечения равны a и $\frac{a}{2}$, а апофема — a .

470. Диагонали трапеции $ABCD$ с периметром 14,4 пересекаются в точке Q . Точки A_1, B_1, C_1, D_1 на диагоналях выбраны так, что $QA_1 : QA = QB_1 : QB = QC_1 : QC = 2 : 3$. Найдите периметр четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$.

471. В равнобедренный треугольник с боковой стороной 20 и основанием 24 вписана окружность, и к ней проведена касательная, параллельная основанию. Найдите периметр треугольника, отсеченного этой касательной.

472. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны такие точки M и N , что прямая MN проходит через центр вписанной в треугольник окружности и параллельна AC . Найдите периметр треугольника ABC , учитывая, что:

а) $MB = 12$, $BN = 15$ и $MN = 18$;

б) $MB = n$, $BN = m$ и $MN = b$.

473. Найдите стороны прямоугольника, который прямая делит на два подобных друг другу прямоугольника с диагоналями 15 и 20.

474. Наименьшая из диагоналей двух подобных ромбов равна 6, а наибольшая — 12. Найдите стороны ромбов, учитывая, что их площади отличаются на 30.

475. Ученик при перемножении двух чисел ошибся: цифра десятков в произведении оказалась на 4 меньше нужной. При делении полученного им произведения на больший множитель в частном получается 52 и в остатке — 107. Найдите множители, учитывая, что они отличаются на 94.

476. В некоторой дроби знаменатель на 1 больше удвоенного числителя. Если эту дробь умножить на дробь, у которой числитель и знаменатель увеличены на 5, то получится 0,28. Найдите исходную дробь.

477. В шахматном турнире участвовали студенты и школьники. Школьников было в 10 раз меньше, и они набрали очков в 4,5 раза меньше. Сколько очков набрали студенты?

478. В треугольник вписана окружность. Определите, на какие части точки касания разбивают стороны, если эти стороны равны:

а) 10 см, 17 см, 21 см;

б) 15 см, 26 см, 37 см;

в) 20 см, 51 см, 65 см.

479. Одна из высот остроугольного треугольника делит сторону на части длинами 48 см и 120 см. Найдите остальные стороны этого треугольника, учитывая, что радиус описанной около него окружности равен 85 см.

480. Большая сторона тупоугольного треугольника равна 126 см, а высота, проведенная к ней, — 40 см. Найдите остальные стороны треугольника, учитывая, что радиус описанной около него окружности равен 65 см.

481. Две смежные стороны четырехугольника, описанного около окружности, равны 18 м и 24 м, а периметр — 68 м. Найдите остальные стороны четырехугольника.

* * *

482. Докажите, что прямые, проведенные через точки A_1 , B_1 , C_1 перпендикулярно прямым BC , AC , AB соответственно, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0$.

483. Радиус вписанной в треугольник окружности равен 1, а длины высот треугольника — целые числа. Докажите, что этот треугольник равносторонний.

484. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\cos x - |\sin ax| = 1$$

имеет единственное решение.

485. Числа a , b и $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ — рациональные, а число $\sqrt[3]{a}$ — иррациональное. Докажите, что $a + b = 0$.

10. Конус

Конусом называется тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг оси, проходящей через один из его катетов (рис. 126). На рисунке 127 показано образование конуса при вращении прямоугольного треугольника ABC вокруг прямой l , которой принадлежит катет BC . При этом ломаная BAC описывает поверхность конуса, гипотенуза AB — боковую поверхность, а катет AC — основание конуса (рис. 128). Саму гипотенузу AB называют образующей конуса, неподвижную точку B — вершиной конуса, прямую, проходящую через неподвижный катет BC , — осью конуса, а перпендикуляр, опу-

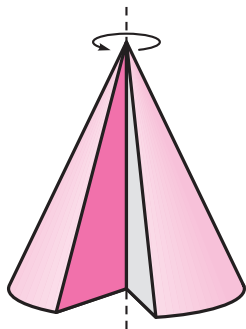


Рис. 126

ценный из вершины конуса на основание, — *высотой* конуса (рис. 129). Основание высоты конуса совпадает с центром основания конуса.

Поверхность конуса можно развернуть на плоскость, в результате получится сектор, представляющий боковую поверхность конуса, и круг, представляющий основание конуса. На рисунке 130 представлены конус и его развертка.

Теорема 5. Боковая поверхность конуса равна произведению полуокружности его основания и образующей:

$$S_{\text{бок}} = \pi r l.$$

Доказательство проведите самостоятельно, используя рисунок 130.

Важной пространственной конфигурацией, которая часто встречается в задачах, является сочетание конуса с плоскостью.

Если конус пересечь плоскостью, параллельной основанию, то получится круг (рис. 131), а если плоскостью, проходящей через вершину, то — равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими конуса (рис. 132).

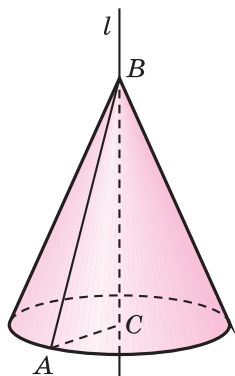


Рис. 127

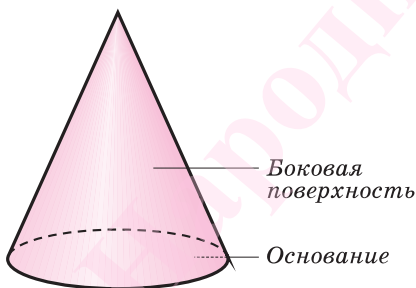


Рис. 128

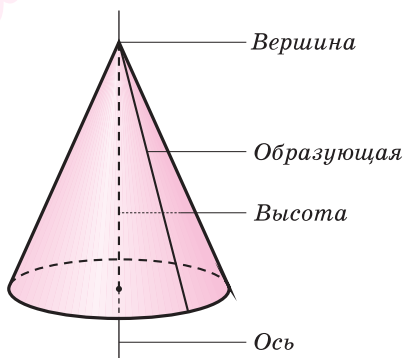


Рис. 129

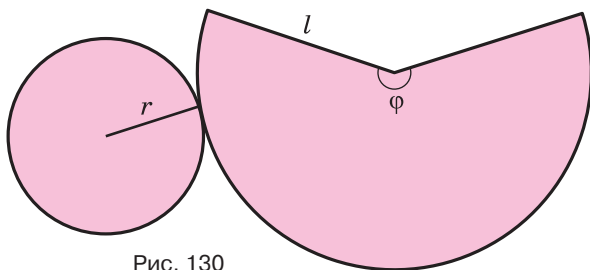
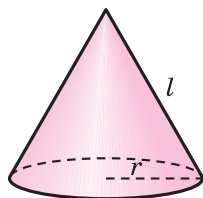


Рис. 130

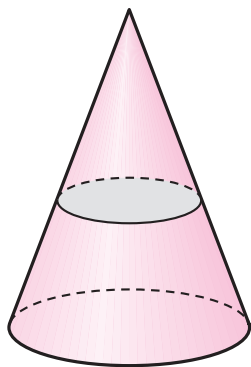


Рис. 131

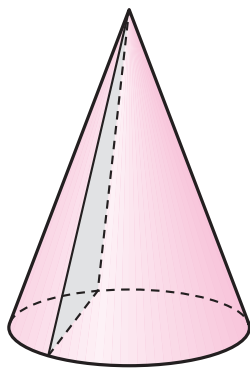


Рис. 132

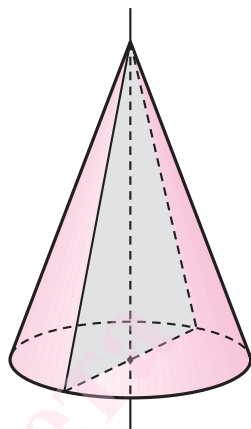


Рис. 133

Осевое сечение конуса, т. е. сечение плоскостью, проходящей через ось конуса, является равнобедренным треугольником, у которого основание равно диаметру основания конуса (рис. 133).

Проведем через вершину конуса секущую плоскость и будем ее поворачивать вокруг прямой, перпендикулярной оси конуса (рис. 134). При этом основание треугольника-сечения будет укорачиваться, а его боковые стороны сближаться до того момента, пока не совпадут. Получим плоскость, целиком содержащую образующую и не имеющую с конусом других общих точек. Такая плоскость называется *касательной плоскостью конуса*.

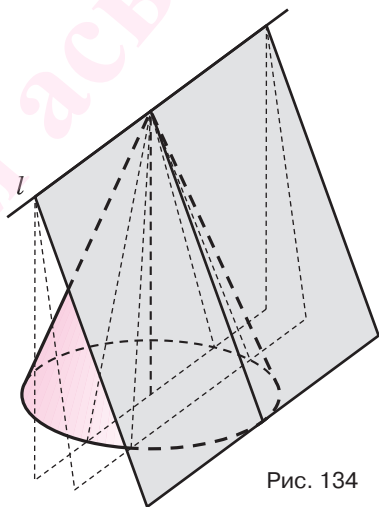


Рис. 134

Теорема 6. Если плоскость касается конуса по некоторой образующей, то ей перпендикулярна плоскость, проходящая через эту образующую и ось конуса.

▲ **Доказательство.** Пусть плоскость α касается конуса с осью AB по образующей AC (рис. 135). Докажем, что плоскость, содержащая эту образующую и ось AB , перпендикулярна плоскости α .

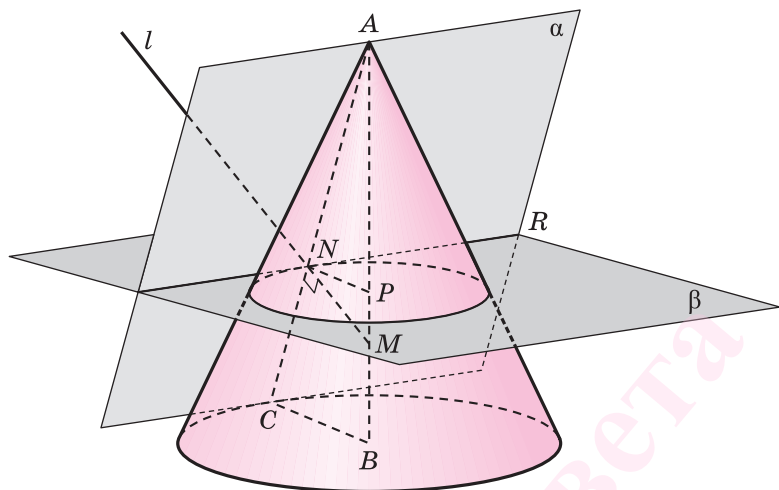


Рис. 135

Проведем прямую l , которая перпендикулярна образующей AC , пересекает ось конуса в точке M , отличной от вершины A . Через точку N проведем плоскость β , перпендикулярную оси AB , она пересечет конус по кругу с центром P и плоскость α — по прямой NR , касающейся окружности с центром P . Эта касательная по свойству касательной к окружности перпендикулярна радиусу PN соответствующей окружности. Но этот радиус является проекцией наклонной MN на плоскость β , поэтому по теореме о трех перпендикулярах прямая NR перпендикулярна наклонной MN , т. е. прямой l .

Таким образом, прямая l перпендикулярна прямым AC и NR , которые пересекаются и лежат в плоскости α , поэтому по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая l перпендикулярна плоскости α . Значит, плоскость ABC , содержащая прямую l , перпендикулярна плоскости α . ▲

Теорема 6 выражает свойство касательной плоскости конуса.

Теорема 7. *Плоскость касается конуса, если она проходит через его образующую и перпендикулярна плоскости, проходящей через эту образующую и ось конуса.*

▲ **Доказательство.** Пусть плоскость α проходит через образующую AC конуса с осью AB и перпендикулярна плоскости ABC (рис. 136). Докажем, что плоскость α касается конуса,

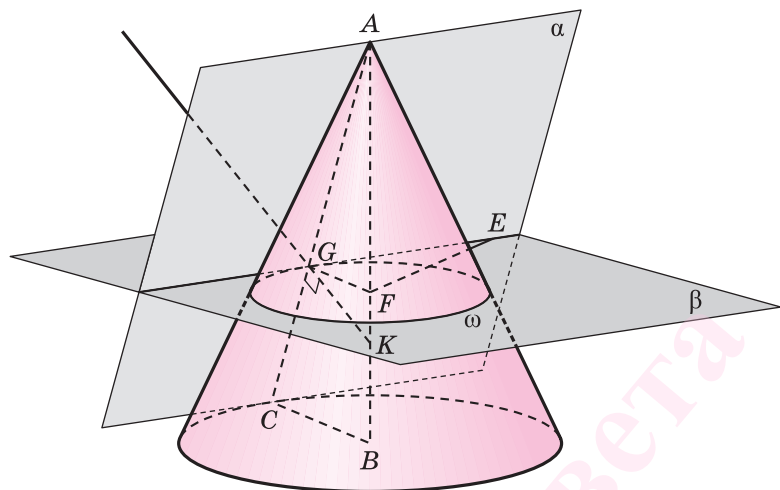


Рис. 136

т. е. что точки образующей AC , и только они, являются общими точками конуса и плоскости α .

Точки образующей AC принадлежат и конусу, и плоскости α . Пусть E — какая-либо точка плоскости α вне образующей AC . Через эту точку проведем плоскость β , перпендикулярную оси AB , она пересекает поверхность конуса по окружности ω с центром F , образующую AC — в некоторой точке G и плоскость α — по прямой GE . Пусть GK — прямая, которая перпендикулярна плоскости α и пересекает ось AB в точке K . Тогда по теореме о трех перпендикулярах прямая GE , проведенная в плоскости β через основание наклонной GK перпендикулярно к ней, перпендикулярна ее проекции FG . Значит, GE — касательная к окружности ω , и поэтому точка E находится вне окружности ω , а значит, и вне конуса. ▲

Теорема 7 выражает признак касательной плоскости конуса.

Пусть есть конус с вершиной P (рис. 137). Впишем в основание конуса многоугольник $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ и через его вершины $A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n$ проведем образующие $A_1P, A_2P, ..., A_{n-1}P, A_nP$. В результате получим тело $PA_1A_2...A_{n-1}A_n$,

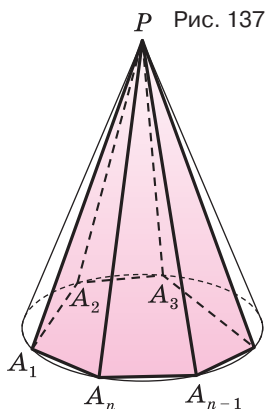
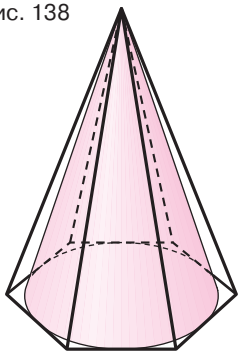


Рис. 137

Рис. 138



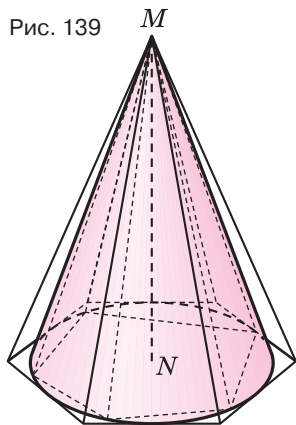
являющееся пирамидой. Ее называют *пирамидой, вписанной в конус*, а сам конус — *конусом, описанным около пирамиды*.

Если основание конуса вписано в основание пирамиды, а боковая поверхность конуса касается боковых граней пирамиды, то говорят, что *пирамида описана около конуса*, или *конус вписан в пирамиду* (рис. 138).

Теорема 8. *Объем конуса равен третьей доле произведения площади его основания и высоты:*

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H.$$

Рис. 139



Доказательство. Пусть есть конус с осью MN (рис. 139). В него впишем правильную пирамиду $MA_1A_2...A_{n-1}A_n$, а около него опишем правильную пирамиду $MB_1B_2...B_{n-1}B_n$. В соответствии с теоремой 4 объем первой пирамиды равен третьей доле произведения площади многоугольника $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ и высоты H пирамиды, т. е. высоты конуса, а объем второй — произведению площади многоугольника $B_1B_2...B_{n-1}B_n$ и той же высоты. Объем самого конуса заключен между этими числами.

Будем увеличивать количество n сторон оснований пирамид. Тогда объем первой пирамиды будет увеличиваться, объем второй — уменьшаться, причем их разность стремится к нулю, если значение переменной n неограниченно увеличивается. То число, к которому приближаются объемы обеих пирамид, принимается за объем конуса.

В описанном процессе высота H пирамиды не изменится, а площади обоих многоугольников — $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ и $B_1B_2...B_{n-1}B_n$ — стремятся к площади S круга, являющегося основанием конуса. Значит, объем V конуса равен третьей доле произведения площади S основания конуса и его высоты H :

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H.$$

Теорема 9. Если конус пересечь плоскостью, параллельной его основанию, то:

а) образующая и высота разделяются на пропорциональные части;

б) площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины.

Используя рисунок 140, докажите эту теорему самостоятельно.

Секущая плоскость, параллельная основанию конуса, разделяет его на две части (рис. 141). Одна из этих частей также является конусом, а другая — телом, которое называется **усеченным конусом**.

Основание данного конуса и круг, полученный в сечении, называют **основаниями** усеченного конуса, а отрезок образующей данного конуса, заключенный между его основанием и секущей плоскостью, — **образующей** усеченного конуса (рис. 142). **Высотой** усеченного конуса называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одного его основания к плоскости другого основания.

Усеченный конус можно получить вращением прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, к которой прилежат прямые углы (рис. 143).

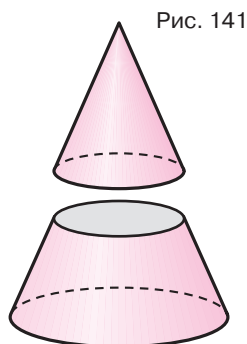
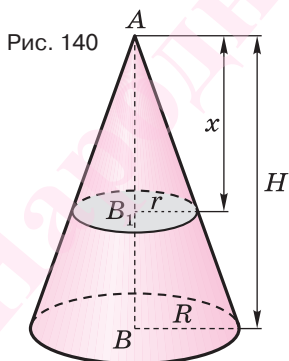
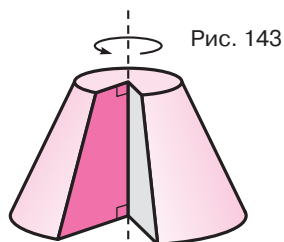
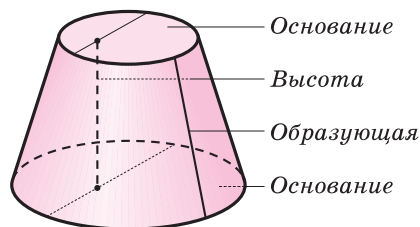


Рис. 142



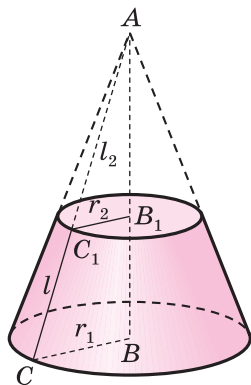


Рис. 144

Пример 1. Найдем боковую поверхность усеченного конуса. Пусть есть усеченный конус, у которого радиусы оснований BC и B_1C_1 равны r_1 и r_2 соответственно, а образующая CC_1 равна l (рис. 144).

Достроим его до полного конуса. Достроенная часть представляет собой конус, у которого радиус основания равен r_2 . Пусть образующая C_1A достроенного конуса равна l_2 .

Боковую поверхность $S_{\text{бок}}$ усеченного конуса можно получить как разность боковых поверхностей S_1 и S_2 полного и достроенного конусов. Пусть C_1 и C_2 — длины окружностей нижнего и верхнего оснований усеченного конуса. Тогда:

$$\begin{aligned} S_{\text{бок}} &= S_1 - S_2 = \frac{1}{2} C_1(l + l_2) - \frac{1}{2} C_2 l_2 = \frac{1}{2} (2\pi r_1 l + 2\pi r_1 l_2 - 2\pi r_2 l_2) = \\ &= \pi(r_1 l + (r_1 - r_2)l_2). \end{aligned}$$

Найдем l_2 , учитывая подобие треугольников ABC и AB_1C_1 :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{l + l_2}{l_2} \equiv r_1 l_2 = r_2 l + r_2 l_2 \equiv l_2 = \frac{r_2 l}{r_1 - r_2}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} S_{\text{бок}} &= \pi(r_1 l + (r_1 - r_2)l_2) = \pi\left(r_1 l + (r_1 - r_2) \frac{r_2 l}{r_1 - r_2}\right) = \pi r_1 l + \pi r_2 l = \\ &= \frac{C_1 + C_2}{2} l. \end{aligned}$$

Таким образом, боковая поверхность усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей его оснований и образующей.

Пример 2. Используя рисунок 144, можно, как и для усеченной пирамиды (см. параграф 9), доказать, что объем V усеченного конуса равен третьей доле произведения высоты H конуса и суммы площадей S_1 и S_2 оснований конуса и их среднего геометрического $\sqrt{S_1 S_2}$:

$$V = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

- ?
1. Какое тело называется конусом?
 2. Что называют поверхностью конуса; боковой поверхностью конуса; основанием конуса?
 3. Какую прямую называют осью конуса?
 4. Какой отрезок называют образующей конуса; высотой конуса?
 5. Чему равна боковая поверхность конуса; объем конуса?
 6. Какая фигура получается при пересечении конуса плоскостью, параллельной его основанию; плоскостью, проходящей через вершину?
 7. Какое сечение конуса называют осевым сечением?
 8. Какую плоскость называют касательной плоскостью конуса?
 9. Сформулируйте свойство касательной плоскости конуса.
 10. Сформулируйте признак касательной плоскости конуса.
 11. Когда говорят, что пирамида вписана в конус; конус описан около пирамиды?
 12. Когда говорят, что конус вписан в пирамиду; пирамида описана около конуса?
 13. Сформулируйте свойство отрезков образующей и высоты конуса, на которые они разделяются плоскостью, параллельной основанию.
 14. Сформулируйте свойство сечения конуса плоскостью, параллельной основанию.
 15. Какое тело называется усеченным конусом?
 16. Что называют основаниями усеченного конуса, его образующей и высотой?

486. Докажите, что полная поверхность S конуса с образующей l и радиусом основания r может быть вычислена по формуле $S = \pi r(l + r)$.

487. Найдите образующую конуса, высота которого равна 45 см, а радиус основания — 24 см.

488. Образующая конуса, равная 12 см, наклонена к плоскости основания под углом α . Найдите площадь основания конуса, учитывая, что:

- а) $\alpha = 30^\circ$; б) $\alpha = 45^\circ$; в) $\alpha = 60^\circ$.

489. Найдите поверхность тела, образованного вращением:

- а) прямоугольного треугольника с катетами 6 см и 8 см вокруг меньшего катета;
- б) равнобедренного треугольника с боковой стороной m и углом при основании φ вокруг основания;
- в) прямоугольного треугольника с катетом a и прилежащим к нему углом 60° вокруг оси, проходящей через вершину данного острого угла перпендикулярно катету.

490. Найдите полную поверхность конуса, у которого:

- а) образующая наклонена под углом φ к основанию, а вписанный в него треугольник имеет одной стороной отрезок длиной a и противолежащий угол величиной α ;
- б) площадь осевого сечения равна $0,6 \text{ м}^2$, а высота конуса — $1,2 \text{ м}$;
- в) площадь осевого сечения равна 25 см^2 , а угол между высотой и образующей — 45° .

491. Найдите боковую поверхность и площадь основания конуса, учитывая, что его осевое сечение — равносторонний треугольник с высотой $2\sqrt{3} \text{ см}$.

492. Определите угол развертки боковой поверхности конуса, у которого:

- а) наибольший угол между образующими является прямым;
- б) образующая составляет с плоскостью основания угол в 30° ;
- в) радиус основания равен r , а образующая — l .

493. Сектор с радиусом 6 м и углом 120° свернут в коническую поверхность. Найдите площадь основания и высоту соответствующего конуса.

494. Полукруг свернут в коническую поверхность. Найдите угол между образующей соответствующего конуса и его высотой.

495. Найдите боковую поверхность конуса, высота которого равна 4 см , а угол при вершине осевого сечения равен 90° .

496. Две стороны треугольника равны b и c , а тупой угол между ними — α . Найдите объем тела, образованного вращением треугольника около стороны b .

497. Докажите, что если треугольник вращается вокруг стороны, то объем полученного тела равен $\frac{1}{3}\pi R^2 h$, где h — сторона, вокруг которой происходит вращение, а R — высота треугольника, опущенная на эту сторону.

498. Отношение боковой и полной поверхностей конуса равно $\frac{5}{8}$. Найдите угол между образующей и плоскостью основания конуса.

499. Площадь основания конуса равна S , а его боковая поверхность — S_0 . Найдите площадь осевого сечения конуса.

500. Через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу в 120° , проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол в 45° . Найдите площадь сечения, учитывая, что радиус основания равен 20 см.

501. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, учитывая, что:

а) она проведена через вершину конуса и отсекает от окружности основания дугу в 90° , а высота конуса равна радиусу основания r ;

б) она проведена через две взаимно перпендикулярные образующие, высота конуса равна h и наклонена к образующей под углом в 60° ;

в) она проведена через вершину конуса, составляет с плоскостью основания угол в 60° и отсекает от окружности основания с радиусом r дугу в 120° ;

г) она проведена через вершину конуса и отстоит от центра основания на 24 см, высота конуса равна 40 см, а радиус основания — 50 см;

д) она параллельна основанию конуса с радиусом R и отстоит на d от вершины, а высота конуса равна H .

502. Осевое сечение конуса — правильный треугольник со стороной $2m$. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие конуса, угол между которыми равен:

а) 30° ; б) 45° ; в) 60° ; г) 90° .

503. Найдите косинус угла при вершине осевого сечения конуса, который имеет три попарно перпендикулярные образующие.

504. На расстоянии 2 см от вершины конуса с высотой 5 см проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите объем исходного конуса, учитывая, что объем конуса, отсеченного от исходного, равен 24 см^3 .

505. Определите, на каком расстоянии от основания конуса проходят две плоскости, параллельные плоскости этого основания и делящие боковую поверхность конуса на три равные части, учитывая, что высота конуса равна H .

506. Через середину высоты конуса проведена прямая, параллельная его образующей, длина которой равна l . Найдите длину отрезка прямой, заключенного внутри конуса.

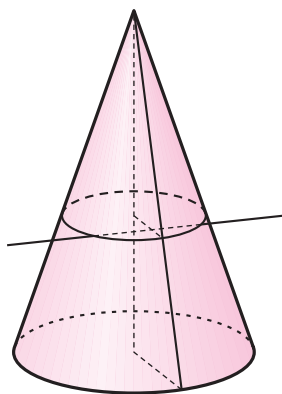


Рис. 145

507. Есть конус с образующей 13 см и высотой 12 см, пересеченный прямой, параллельной основанию и отстоящей от основания на 6 см, а от высоты на 2 см (рис. 145). Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри конуса.

508. Найдите объем тела, полученного вращением:

- а) параллелограмма с площадью Q вокруг стороны длиной a ;
- б) треугольника со сторонами 15 см, 41 см и 52 см вокруг большей стороны;
- в) прямоугольного треугольника с площадью S и острым углом α вокруг его гипотенузы.

509. Найдите объем конуса, учитывая, что его:

- а) высота равна H и равна диаметру его основания;
- б) образующая равна 13 см, а площадь осевого сечения — 60 см^2 ;
- в) образующая равна l , а боковая поверхность — P ;
- г) площадь его основания равна Q , а боковая поверхность — P .

510. Найдите объем конуса, у которого:

- а) диаметр основания равен 40 см, а высота — 50 см;
- б) образующая равна 60 см, а высота — 30 см;
- в) радиус основания равен 85 см, а образующая составляет с осью конуса угол в 30° ;
- г) радиус основания равен 42 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 65° ;
- д) полная поверхность равна 680 дм^2 , а образующая — 25 дм;
- е) полная поверхность равна 160 см^2 , а образующая больше радиуса основания на 2 см.

511. Пусть h , r и V — соответственно высота, радиус основания и объем конуса. Найдите:

- а) V , учитывая, что $h = 12 \text{ см}$, $r = 6 \text{ см}$;
- б) h , учитывая, что $r = 4 \text{ см}$, $V = 48\pi \text{ см}^3$;
- в) r , учитывая, что $h = m$, $V = p$.

512. Высота конуса разделена на три доли, и через точки деления проведены плоскости, параллельные плоскости основания конуса. Определите, в каком отношении этими плоскостями делится объем конуса.

513. Есть конус, радиус основания которого равен r , а высота — H . Определите, на каком расстоянии от плоскости основания нужно провести плоскость, ей параллельную, чтобы этой плоскостью конус разделился на части, объемы которых относятся как:

- а) $1 : 1$; б) $1 : 2$; в) $2 : 1$; г) $1 : \sqrt{2}$; д) $\sqrt{2} : 1$.

514. Через середину высоты конуса, боковая поверхность которого равна 80 см^2 , проведена плоскость, перпендикулярная высоте. Найдите боковую поверхность образовавшегося усеченного конуса.

515. Учитывая, что радиусы оснований усеченного конуса равны:

- а) 9 см и 18 см, а высота — 12 см, найдите его образующую;
б) 16 см и 4 см, а образующая — 20 см, найдите его высоту.

516. Найдите поверхность усеченного конуса, учитывая, что радиусы его оснований равны 6 см и 10 см, а образующая — 10 см.

517. Докажите, что:

- а) боковая поверхность конуса равна боковой поверхности цилиндра с той же высотой и радиусом основания, равным высоте равнобедренного треугольника, основанием которого является образующая, а вершина лежит на оси конуса (рис. 146);
б) боковая поверхность усеченного конуса равна боковой поверхности цилиндра с той же высотой и радиусом основания, равным высоте равнобедренного треугольника, основанием которого является образующая, а вершина лежит на оси конуса (рис. 147).

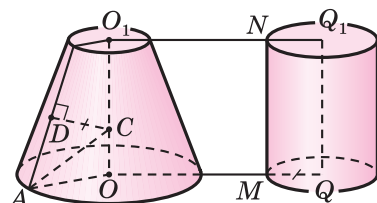
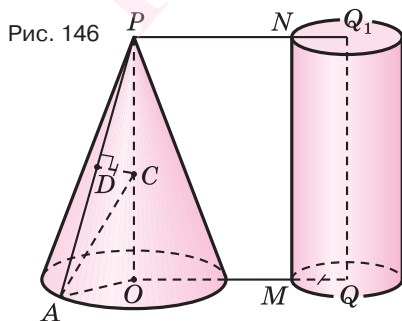


Рис. 147

518. Найдите площадь сечения усеченного конуса плоскостью, учитывая, что она проходит через:

а) две его образующие, отсекает от окружности основания дугу в 120° , радиусы оснований конуса равны 3 и 5, а высота — $\sqrt{2}$;

б) середину высоты, параллельна основаниям, площади которых равны 16 дм^2 и 64 дм^2 .

519. Плоскость, параллельная основанию конуса с радиусом 6 м, пересекает его по кругу с радиусом 3 м. Найдите объемы полученных частей конуса, учитывая, что плоскость разделяет образующую конуса на части, из которых та, которая ограничена этой плоскостью и основанием конуса, равна 5 м.

520. Плоскость, параллельная основанию конуса с радиусом 22 м, пересекает его по кругу с радиусом 4 м. Часть конуса, заключенная между его основанием и секущей плоскостью, равновелика цилиндру с такой же высотой. Найдите радиус основания этого цилиндра.

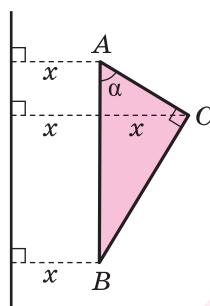


Рис. 148

521. Прямоугольный треугольник с гипотенузой s и острым углом α вращается вокруг прямой, параллельной гипотенузе, отстоящей от нее на высоту, проведенную к гипотенузе, и не имеющей с треугольником общих точек (рис. 148). Найдите объем полученного тела.

522. В конусе просверлили цилиндрическое отверстие, ось которого совпадает с осью конуса. Найдите объем образовавшегося тела, учитывая, что высота конуса равна 30 см, диаметр его основания равен 20 см, а диаметр цилиндрического отверстия — 10 см.

523. В треугольную пирамиду с равными ребрами вписан конус, и около этой пирамиды описан конус. Определите, во сколько раз полная поверхность описанного конуса больше полной поверхности вписанного конуса.

524. Высота конуса равна 4 см, а радиус — 6 см. Найдите полную поверхность правильной n -угольной пирамиды, вписанной в конус, учитывая, что:

- а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 5$.

525. В конус вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник. Меньшая сторона прямоугольника равна a , а острый угол между его диагоналями — α . Боковая грань, содержащая меньшую сторону основания, составляет с плоскостью основания угол β . Найдите объем конуса.

526. Основанием пирамиды является ромб со стороной a и острым углом φ . В пирамиду вписан конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол β . Найдите объем конуса.

527. Есть конус с радиусом основания 5 см и высотой 4 см, в который вписана правильная n -угольная пирамида. Плоскость, параллельная основанию конуса, пересекает его по кругу с радиусом 2 см. Найдите полную поверхность части пирамиды, заключенную между основанием конуса и секущей плоскостью, учитывая, что:

- а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 5$.

528. Найдите ребро:

- а) куба, вписанного в конус с радиусом основания R и высотой H (рис. 149);
 б) правильной треугольной призмы, у которой боковые грани являются квадратами и которая вписана в конус с радиусом основания R и высотой H .

529. Есть конус с образующей l , наклоненной к плоскости основания конуса под углом в 60° . В него вписана правильная треугольная призма, боковое ребро которой в два раза больше стороны основания (рис. 150). Найдите это ребро.

Рис. 149

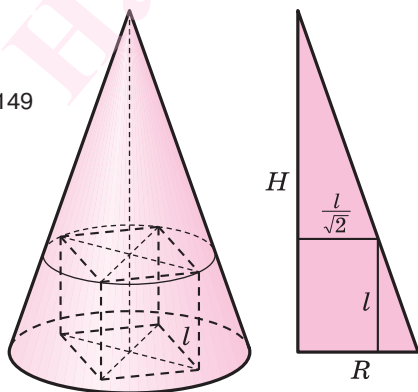
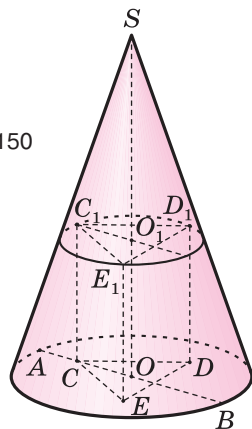


Рис. 150



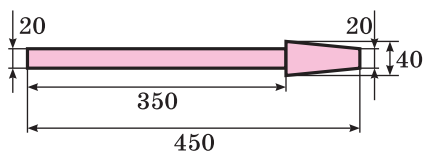


Рис. 151

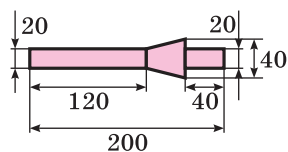


Рис. 152

530. Принимая плотность стали равной $7,8 \text{ г/см}^3$, найдите массу круглой стальной детали, размеры которой в миллиметрах даны на рисунке:

- а) 151; б) 152.

531. Вычислите:

- а) $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{-6} - (0,125)^{-1} + \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^0$; г) $\left(\left(3^{-\frac{1}{4}}\right)^8 + \left(\frac{3}{2}\right)^0\right)^{-2}$;
 б) $2 \cdot (-3)^{-2} + \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-3} + (-3)^0$; д) $\left(33 \cdot \left(4^{\frac{1}{4}}\right)^{-12} + \frac{(-2)^{-5}}{2}\right)^{-3}$;
 в) $\left(\left(6^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + (0,25)^{-1}\right) \cdot (0,5)^3$; е) $\left(2^{-10}\right)^{\frac{1}{2}} - 7 \cdot (-0,5)^{-2}\right)^{-1}$.

532. Вычислите:

- а) $\sqrt{25 + 2\sqrt{84}} \cdot (\sqrt{21} - 2)$; в) $\sqrt{60 + 10\sqrt{35}} \cdot (10 - \sqrt{140})$;
 б) $\sqrt{18 \cdot \sqrt{83} + 164 \cdot (9 - \sqrt{83})}$; г) $\sqrt{\sqrt{204} + 20 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{17})}$.

533. Упростите выражение:

- а) $\frac{1 + (a+x)^{-1}}{1 - (a+x)^{-1}} \left(1 - \frac{1 - (a^2 + x^2)}{2ax}\right)$; д) $\frac{b^{\frac{3}{2}} - c^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{2}{b^3} \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} \frac{2}{c^3}}{\frac{1}{b^6} + \frac{1}{c^6}}$;
 б) $\frac{u^{-1} + v^{-1}}{u^{-2} - v^{-2}} : \left(\frac{1}{v^{-1}} - \frac{1}{u^{-1}}\right)^{-1}$; е) $\frac{r^{\frac{1}{3}} - r^{\frac{7}{3}}}{r^{\frac{1}{3}} - r^{\frac{4}{3}}} + r \cdot \frac{r^{-\frac{1}{3}} - r^{\frac{5}{3}}}{\frac{2}{r^3} - r^{-\frac{1}{3}}}$;
 в) $\frac{d^{-2} + c^{-2}}{d^{-1} + c^{-1}} : \left(\frac{dc}{d^2 + c^2}\right)^{-1}$; ж) $\left(\frac{1 - z^{-\frac{1}{2}}}{1 + z^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1 + z^{-\frac{1}{2}}}{1 - z^{-\frac{1}{2}}}\right) : \frac{z+1}{z-1}$;
 г) $\frac{p^{-1} - r^{-1}}{p^{-3} + r^{-3}} : \left(\frac{rp^{-2} + pr^{-2}}{r - p}\right)^{-1}$; з) $\frac{p^{\frac{5}{4}} - p^{\frac{1}{4}}}{p^4 + p^2} : \frac{p^{\frac{1}{2}} + 1}{p^2 + p^4} + 1$.

534. Решите уравнение:

- а) $\sqrt{\frac{3-m}{2+m}} - 3\sqrt{\frac{2+m}{3-m}} = 2$; б) $\sqrt{\frac{2-s}{s-1}} - 7\sqrt{\frac{s-1}{2-s}} = 6$;

$$в) \frac{4}{\sqrt{a+2}} + \frac{\sqrt{a-3}}{2} = 2;$$

$$г) \frac{5}{\sqrt{d-1}} - 2\sqrt{d-1} = 3.$$

535. Решите уравнение:

$$а) \sqrt{6-x} + \sqrt{x-2} + 2\sqrt[4]{(6-x)(x-2)} = 2;$$

$$б) \sqrt[4]{77+c} + \sqrt[4]{20-c} = 5;$$

$$в) \sqrt[3]{b+3} + \sqrt[3]{6-b} = 3;$$

$$г) \sqrt[5]{33-y} + \sqrt[5]{y} = 3.$$

536. Первый и четвертый члены геометрической прогрессии равны соответственно 64 и 8. Найдите сумму первых пяти членов этой прогрессии.

537. Три целых числа образуют геометрическую прогрессию. Найдите третий член этой прогрессии, учитывая, что второй член положителен и на единицу больше первого.

538. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 1,5, а сумма квадратов ее членов — 0,125. Найдите знаменатель этой прогрессии.

539. Определите, при каких значениях переменной m из четырех корней уравнения $x^4 + (m-3)x^2 + (m+10)^2 = 0$ можно образовать арифметическую прогрессию.

* * *

540. Сравните числа

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}} \quad \text{и} \quad \frac{4+\sqrt{7}}{3\sqrt{2}+\sqrt{4+\sqrt{7}}} + \frac{4-\sqrt{7}}{3\sqrt{2}-\sqrt{4-\sqrt{7}}}.$$

541. Через основания биссектрис треугольника проведена окружность. Докажите, что из отрезков, высекаемых ею на сторонах треугольника, один равен сумме двух других.

542. Функция $f(x)$ определена на множестве действительных чисел, принимает действительные значения и удовлетворяет условию

$$f(x + f(xy)) = xf(1 + f(y))$$

при всех действительных x и y . Найдите все такие функции.

543. Есть n пчел и $n+1$ цветков. Определите, при каких значениях переменной n может так случиться, что каждая пчела посетила одинаковое количество цветков, но на каждом цветке побывало разное количество пчел.

Показательные и логарифмические выражения, функции, уравнения, неравенства

11. Показательная функция

Показательной функцией называется функция, заданная формулой

$$y = a^x,$$

где a — некоторое действительное число, $a > 0$ и $a \neq 1$.

Теорема 1. *Областью определения показательной функции является множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел, а областью значений — множество $\mathbf{R}_+$ всех положительных действительных чисел.*

Доказательство. Пусть $a > 0$. Тогда, по свойству (10) степени с действительным показателем из параграфа 6, выражение a^x имеет значение при любом значении переменной x , а это означает, что областью определения показательной функции является множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел.

Поскольку $a > 0$, то, по свойству (11) степени с действительным показателем из параграфа 6, значение выражения a^x положительно при всех значениях переменной x . В курсе математического анализа доказывается, что при $b > 0$ уравнение $a^x = b$ имеет единственный корень. Это означает, что каждое положительное число b можно получить как значение выражения a^x , иными словами, областью значений показательной функции является множество $\mathbf{R}_+$ всех положительных действительных чисел.

Теорема 2. *Показательная функция $y = a^x$ на множестве всех действительных чисел при $a > 1$ является возрастающей, а при $0 < a < 1$ — убывающей.*

Доказательство. Сравним значения выражений a^{x_1} и a^{x_2} :

$$a^{x_1} - a^{x_2} = a^{x_1}(1 - a^{x_2 - x_1}).$$

Пусть $x_1 < x_2$, т. е. $x_2 - x_1 > 0$. Если $a > 1$, то, по свойству (12) степени с действительным показателем из параграфа 9, из условия $x_2 - x_1 > 0$ следует, что $a^{x_2 - x_1} > 1$, а потому $1 - a^{x_2 - x_1} < 0$ и, значит, $a^{x_1}(1 - a^{x_2 - x_1}) < 0$, так как $a^{x_1} > 0$ по свойству (11) из параграфа 6. Получили, что $a^{x_1} - a^{x_2} < 0$, или $a^{x_1} < a^{x_2}$. Это неравенство вместе с определением возрастающей функции позволяет утверждать, что функция $y = a^x$ является возрастающей при $a > 1$.

Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$ и по уже доказанному $\left(\frac{1}{a}\right)^{x_1} < \left(\frac{1}{a}\right)^{x_2}$, или $\frac{1}{a^{x_1}} < \frac{1}{a^{x_2}}$, и потому $a^{x_1} > a^{x_2}$. Это неравенство с учетом определения убывающей функции позволяет утверждать, что при $0 < a < 1$ функция $y = a^x$ является убывающей.

Следствие 1. *Равные степени с одним и тем же положительным и не равным единице основанием имеют равные показатели:*

если $a > 0$, $a \neq 1$ и $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$.

Действительно, если допустить, что $x_1 < x_2$, то при $a > 1$ по теореме 2 получим, что $a^{x_1} < a^{x_2}$, а при $0 < a < 1$ — что $a^{x_1} > a^{x_2}$. Но оба эти неравенства противоречат условию.

Так же приводит к противоречию с условием и допущение $x_1 > x_2$.

Теорема 3. *Графики всех показательных функций проходят через точку (0; 1).*

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что при любом положительном a истинно равенство $a^0 = 1$.

Построим график функции $y = 2^x$. Для этого нанесем на координатную плоскость некоторые точки этого графика, составив предварительно таблицу значений функции.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Используя построенные точки и установленные свойства показательной функции, получим график функции $y = 2^x$, который представлен на рисунке 153. Обратим внимание на то, что график функции $y = 2^x$ при уменьшении отрицательных значений переменной x быстро приближается к оси абсцисс, но остается выше нее.

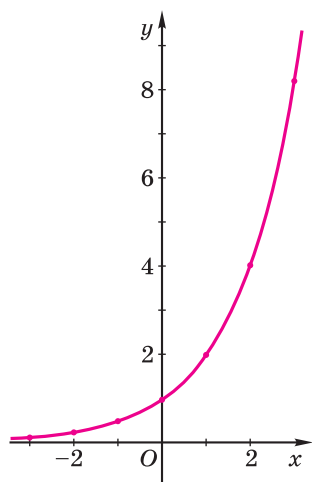


Рис. 153

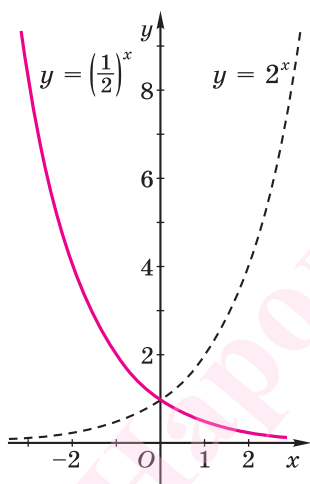


Рис. 154

Для построения графика функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ учтем, что $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$, и используем утверждение о том, что график функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси ординат. Указанное преобразование приведено на рисунке 154. Обращаем внимание на то, что график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ при увеличении положительных значений переменная x быстро приближается к оси абсцисс, но не пересекает ее.

Теорема 4. Если $0 < a < b$, то $a^x < b^x$ при $x > 0$ и $a^x > b^x$ при $x < 0$.

Доказательство. Пусть $0 < a < b$, тогда $\frac{b}{a} > 1$. Сравним значения выражений a^x и b^x :

$$a^x - b^x = a^x \left(1 - \frac{b^x}{a^x}\right) = a^x \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^x\right).$$

Пусть $x > 0$, тогда $\left(\frac{b}{a}\right)^x > 1$, так как $\frac{b}{a} > 1$. Значит, $1 - \left(\frac{b}{a}\right)^x < 0$, а потому $a^x \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^x\right) < 0$, так как $a^x > 0$. Значит, $a^x - b^x < 0$, или $a^x < b^x$.

Пусть $x < 0$, тогда $\left(\frac{b}{a}\right)^x < 1$ и, значит, $1 - \left(\frac{b}{a}\right)^x > 0$. Поскольку $a^x > 0$, то

$$a^x \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^x\right) > 0. \text{ Значит, } a^x - b^x > 0, \text{ или } a^x > b^x.$$

В соответствии с теоремой 4 при увеличении основания a график функции $y = a^x$ на промежутке $(-\infty; 0)$ будет располагаться более близко к оси абсцисс, а на промежутке $(0; +\infty)$ — более далеко.

График любой показательной функции $y = a^x$ с основанием a , большим единицы, похож на график функции $y = 2^x$. На

рисунке 155 представлены графики функций $y = 5^x$ и $y = 10^x$.

График любой показательной функции $y = a^x$ с положительным основанием a , меньшим единицы, похож на график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

На рисунке 156 приведены графики функций $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ и $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$.

Обратим внимание на ограничения $a > 0$ и $a \neq 1$ на основание степени a показательной функции $y = a^x$. Первое ограничение вызвано тем, что значение выражения a^x определено при всех значениях показателя x только при положительном основании. Второе ограничение объясняется тем, что при $a = 1$ функция $y = a^x$ принимает вид $y = 1^x$, т. е. все значения такой функции равны единице (рис. 157), и такая функция не вызывает особого интереса.

Показательная функция описывает ряд физических процессов. Например, радиоактивный распад определяется формулой $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, где m_0 и $m(t)$ — массы радиоактивного вещества в начальный момент времени 0 и в момент времени t , T — период полураспада, т. е. промежуток времени, за который количество радиоактивного вещества уменьшается в два раза. С помощью показательной функции описывается зависимость $p(h) = p_0 e^{-\frac{h}{H}}$ от высоты h , где $p_0 = p(0)$ — давление на уровне моря, H — определенная константа; ток самоиндукции в катушке после подачи постоянного напряжения.

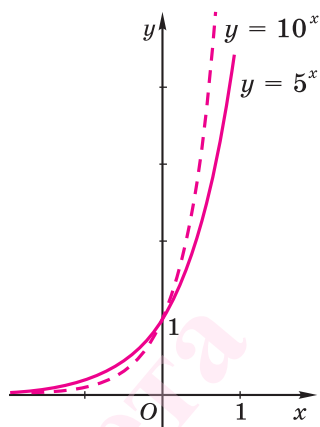


Рис. 155

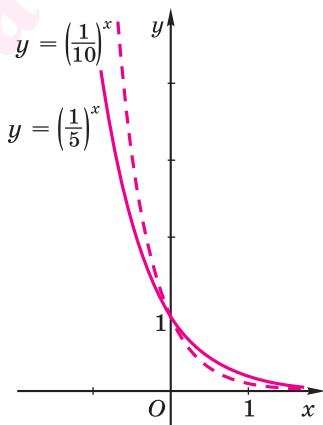


Рис. 156

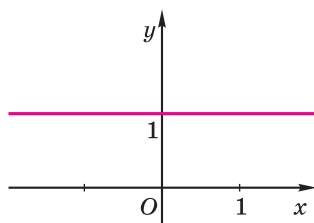


Рис. 157

1. Какая функция называется показательной?
2. Какое множество является областью определения показательной функции; областью значений показательной функции?
3. Какой — возрастающей или убывающей — является показательная функция, если ее основание: больше единицы; положительно и меньше единицы?
4. Какое значение имеют все показательные функции при нулевом значении аргумента?
5. Как связаны значения показательных функций с различными основаниями при одном значении аргумента?
6. Как себя ведет график показательной функции, если ее аргумент неограниченно увеличивается; неограниченно уменьшается?

544. По закону, выведенному основателем космонавтики К. Э. Циолковским, количество M топлива, необходимого для того, чтобы ракета массой m (без топлива) получила скорость v , выражается формулой

$$M = m \left(10^{0,43 \frac{v}{v_1}} - 1 \right),$$

где v_1 — скорость вытекания продуктов горения из сопла ракетного двигателя (сопротивление воздуха и притяжение Земли игнорируются). Найдите, сколько понадобится топлива, чтобы ракете массой 1,2 т придать вторую космическую скорость, равную 11,2 км/с, учитывая, что скорость вытекания продуктов горения из сопла равна 4,5 км/с.

545. Сравните с единицей число:

- а) $2^{-\sqrt{5}}$; в) $0,3^2$; д) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$;
 б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; г) $1,7^3$; е) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}$.

546. Сравните числа:

- а) $4^{-\sqrt{3}}$ и $4^{-\sqrt{2}}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$; д) $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,2}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,2}$;
 б) $2^{\sqrt{3}}$ и $2^{1,7}$; г) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}$ и $\left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$; е) $5^{-0,2}$ и $5^{-1,2}$.

547. Определите, является ли показательной функция:

- а) $y = x^3$; д) $y = 2^{-x}$;
 б) $y = 3^x$; е) $y = x^x$;
 в) $y = (\sqrt[3]{5})^x$; ж) $y = a^x$, где x — некоторое число;
 г) $y = (-2)^x$; з) $y = a^x$, где a — некоторое число.

548. Заполнив таблицу

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

и построив график функции $y = a^x$, проследите на нем свойства показательной функции при:

- а) $a > 1$, взяв основание a равным $\frac{3}{2}$;
 б) $0 < a < 1$, взяв основание a равным $\frac{2}{3}$.

549. Определите, какой — возрастающей или убывающей — является функция:

- а) $y = (\sqrt{5} - 2)^x$; в) $y = 5^x$; д) $y = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$; ж) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$;
 б) $y = \frac{1}{(\sqrt{5} - 2)^x}$; г) $y = (\sqrt{2})^x$; е) $y = \left(\frac{9}{10}\right)^x$; з) $y = 2^{-x}$.

550. Определите, какой — возрастающей или убывающей — является функция:

- а) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; в) $y = -2\left(\frac{1}{3}\right)^x$; д) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$; ж) $y = (3 - \sqrt{7})^x$;
 б) $y = 3^x \cdot 4^x$; г) $y = 3^{x-1}$; е) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$; з) $y = \frac{1}{(3 - \sqrt{7})^x}$.

551. Используя рисунок 158, на котором представлен график функции $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$, определите значение функции $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ при значении аргумента x , равном:

- а) -3; б) -2,5; в) -0,5; г) 0,7; д) 2,6; е) 3.

552. Используя рисунок 158, на котором представлен график функции $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$, определите, при каком значении аргумента x значение функции равно:

- а) 0,45; г) 1,2;
 б) 0,6; д) 2;
 в) 0,8; е) 2,4.

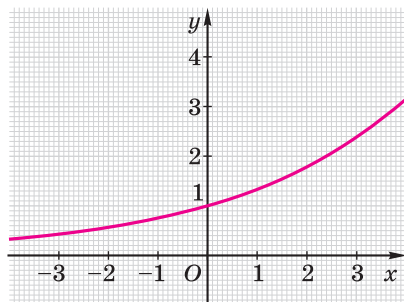


Рис. 158

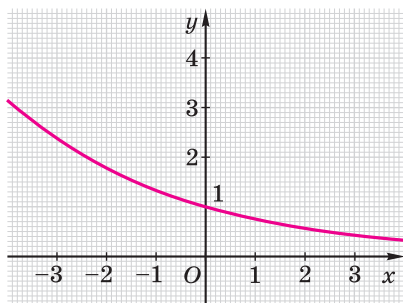


Рис. 159

553. Используя рисунок 158, на котором представлен график функции $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$, определите, при каких значениях аргумента x истинно неравенство:

а) $\left(\frac{4}{3}\right)^x > 0,5$;

б) $\left(\frac{4}{3}\right)^x < 2$;

в) $0,5 < \left(\frac{4}{3}\right)^x < 2$.

554. Используя рисунок 159, на котором представлен график функции $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$, определите ее значение при значении аргумента, равном:

- а) -3 ; б) $-2,5$; в) $-0,5$; г) $0,7$; д) $2,6$; е) 3 .

555. Используя рисунок 159, на котором представлен график функции $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$, определите, при каком значении аргумента значение функции равно:

- а) $0,45$; б) $0,6$; в) $0,8$; г) $1,2$; д) 2 ; е) $2,4$.

556. Используя рисунок 159, на котором представлен график функции $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$, определите, при каких значениях переменной x истинно неравенство:

а) $\left(\frac{3}{4}\right)^x > 0,5$; б) $\left(\frac{3}{4}\right)^x < 2$; в) $0,5 < \left(\frac{3}{4}\right)^x < 2$.

557. С помощью двойного неравенства $\frac{3}{2} < \sqrt{3} < \frac{7}{4}$ найдите приближения по недостатку и по избытку для числа:

а) $4^{\sqrt{3}}$; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{3}}$.

558. Используя возрастание или убывание показательной функции, сравните числа:

- а) $0,15^{\sqrt{2}}$ и 1 ; в) $3,2^{1,5}$ и $3,2^{1,6}$; д) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,4}$;
 б) $(3,52)^{0,1}$ и 1 ; г) $0,2^{-3}$ и $0,2^{-2}$; е) 3^π и $3^{3,14}$.

559. Постройте график функции:

- а) $y = 3^x$; г) $y = 3^{x+2}$; ж) $y = 3 \cdot 3^x$; к) $y = 3^{2x}$;
 б) $y = 3^x + 2$; д) $y = 3^{x-2}$; з) $y = \frac{1}{3} \cdot 3^x$; л) $y = 3^{|x|}$;
 в) $y = 3^x - 2$; е) $y = -3^x$; и) $y = 3^{-x}$; м) $y = 3^{\frac{1}{2}x}$.

560. Постройте график функции:

- а) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; г) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$; ж) $y = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$;
 б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$; д) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$; з) $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$;
 в) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$; е) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$; и) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$.

561. Изобразите схематически график функции:

- а) $y = 0,4^x$; б) $y = (\sqrt[3]{3})^x$; в) $y = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)^x$; г) $y = \left(\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}}\right)^x$.

562. Определите, верно ли, что показательная функция $f(x) = a^x$:

- а) имеет экстремумы;
 б) принимает в некоторой точке наибольшее значение;
 в) принимает в некоторой точке значение, равное нулю;
 г) принимает в некоторой точке значение, равное единице;
 д) является четной;
 е) является нечетной;
 ж) является возрастающей;
 з) является убывающей.

563. Учитывая, что значение переменной x принадлежит промежутку $[-2; 1]$, найдите промежуток значений функции:

- а) $y = 5^x$; в) $y = 11^x$;
 б) $y = 5^{-x}$; г) $y = 11^{-x}$.

564. Используя график функции $y = 4^x$, представленный на рисунке 160, найдите приближенно значение выражения:

- а) $4^{1,3}$; г) $2^{-3,2}$; ж) $\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$;
 б) $4^{-1,3}$; д) $\sqrt[3]{4}$; з) $\sqrt[6]{512}$;
 в) $\sqrt[5]{64}$; е) $\sqrt[3]{16}$; и) $2^{3,2}$.

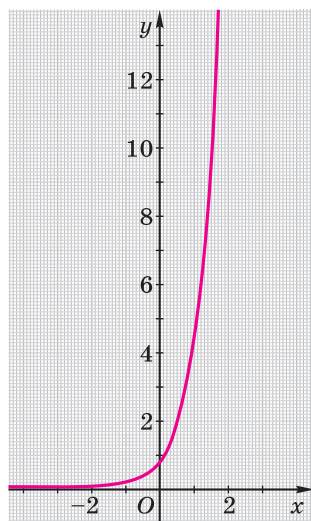


Рис. 160

565. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

- а) $y = 2^x$ на промежутке $[-1; 3]$;
б) $y = 2^{|x|}$ на промежутке $[-2; 1]$;
в) $y = 2^{-x}$ на промежутке $[-3; 0]$;
г) $y = 2^{-|x|}$ на промежутке $[-2; 2]$.

566. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

- а) $y = 2^{\cos x}$; в) $y = 5 + 4^{|\sin x|}$;
б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$; г) $y = 4 - 5^{|\cos x|}$.

567. Найдите область значений функции:

- а) $y = 3^{x+1} - 3$; в) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$; д) $y = \frac{1}{1+3^x}$;
б) $y = 12^x - 21$; г) $y = 4^{|x|}$; е) $y = 3^{-x^2}$.

568. Найдите область значений функции:

- а) $y = 3^{\sin x}$; в) $y = \sqrt{1-3^x}$; д) $y = 3^{-x} + \sin x$;
б) $y = 3^{-\cos x}$; г) $y = \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})$; е) $y = x + 3^x$.

569. Используя свойства показательной функции, сравните значения выражений:

- а) $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$ и $(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$; в) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2,1}$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2,2}$;
б) $2,1^{-1,5}$ и $2,1^{-2}$; г) $(0,3)^{-3,14}$ и $(0,3)^{-\pi}$.

570. Определите, какое из чисел — α или β — больше, учитывая, что:

- а) $(\sqrt{2})^\alpha < (\sqrt{2})^\beta$; в) $0,3^\alpha > 0,3^\beta$;
б) $3,1^\alpha < 3,1^\beta$; г) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^\alpha > \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^\beta$.

571. Определите, какому из промежутков — $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$ — принадлежит значение переменной x , учитывая, что:

- а) $2^x = 1,7$; б) $(\sqrt{2})^x = 0,5$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{5}$.

572. Укажите условие, которому удовлетворяет показатель степени m , учитывая, что:

- а) $(0,2)^m = \frac{1}{25}$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^m = \frac{4}{3}$; д) $10^m = 35$;
б) $\left(\frac{2}{3}\right)^m = \frac{3}{4}$; г) $10^m = 0,1$; е) $\left(\frac{5}{3}\right)^m = 0,2$.

573. Укажите условие, которому удовлетворяет положительное основание a , учитывая, что:

- а) $a^{\frac{2}{3}} > a^{\frac{3}{4}}$; б) $a^{\frac{2}{3}} < a^{\frac{3}{4}}$; в) $a^{-0,2} > a^{-1,2}$; г) $a^{-\frac{5}{6}} < a^{\frac{4}{3}}$.

574. Докажите, что последовательность значений функции $y = 6^{-x}$ при натуральных значениях переменной x является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

575. В одной и той же системе координат постройте графики трех функций $y = 2^x$, $y = 3^x$ и $y = 5^x$ и запишите неравенством результат сравнения их значений при определенном значении аргумента.

576. Докажите, что график показательной функции $y = f(x)$ является вогнутым, т. е. что для любых значений x_1 и x_2 аргумента истинно неравенство $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

577. Используя графики функций $y = 2^x$ и $y = 3^x$, решите:

- а) уравнение $(\sqrt{2})^x = (\sqrt{3})^x$; в) неравенство $(\sqrt{2})^x < (\sqrt{3})^x$;
б) уравнение $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$; г) неравенство $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x > \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$.

578. Решите графически уравнение:

- а) $2^x = x$; г) $2^x = \sin x$; ж) $-2^x = \sin x$;
б) $2^x = x^2$; д) $2^x = \cos x$; з) $2^{-x} = \cos x$;
в) $2^x = x^3$; е) $2^x = -x^2 + 1$; и) $2^{-x} = -x + 3$.

579. Найдите такое двузначное число, которое при делении на произведение его цифр дает в частном 3 и в остатке 9.

580. Человек вышел из дома между 9 и 10 часами, а вернулся назад днем между 13 и 14 часами, когда часовая и минутная стрелки поменялись местами. Определите время выхода и возвращения.

581. Войсковая колонна имеет длину 1 км. Связной выехал из головы колонны, передал пакет в ее хвост и вернулся назад. За это время колонна прошла 5 км. Какой путь за это время проделал связной?

582. Площадь первого поля равна 9 га, урожайность второго поля составила 40 ц/га, а средняя урожайность обоих полей оказалась равной 49 ц/га. Найдите общий урожай с

обоих полей, учитывая, что такой урожай при урожайности, равной сумме урожайностей первого и второго полей, можно собрать с поля площадью 9,8 га.

583. Найдите значение выражения:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| а) $\arcsin(\sin 40^\circ)$; | д) $\arccos(\cos 25^\circ)$; |
| б) $\arcsin(\sin 140^\circ)$; | е) $\arccos(\cos 125^\circ)$; |
| в) $\arcsin(\sin 195^\circ)$; | ж) $\arccos(\cos 215^\circ)$; |
| г) $\arcsin(\sin 310^\circ)$; | з) $\arccos(\cos 310^\circ)$. |

584. Найдите значение выражения:

- | | |
|--|--|
| а) $\sin\left(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13}\right)$; | в) $\cos\left(\arccos \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13}\right)$; |
| б) $\sin\left(\arcsin \frac{3}{5} + \arccos \frac{5}{13}\right)$; | г) $\cos\left(\arccos \frac{3}{5} + \arccos \frac{5}{13}\right)$. |

585. Определите, верно ли утверждение:

- а) все грани прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники;
- б) все грани прямого параллелепипеда — прямоугольники;
- в) ни одна из граней наклонного параллелепипеда не является прямоугольником;
- г) правильная четырехугольная призма, одна из боковых граней которой — квадрат, является кубом;
- д) прямой параллелепипед является правильной призмой;
- е) прямоугольный параллелепипед является прямой призмой;
- ж) прямоугольный параллелепипед является правильной призмой.

586. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a , а боковое ребро — $2a$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через сторону основания и центр другого основания.

587. Вершины K и L прямоугольника $KLMN$ лежат на окружности одного из оснований цилиндра, а вершины M и N — на окружности другого основания. Найдите радиус цилиндра, учитывая, что его образующая и отрезок KL равны a , а угол между прямой LM и плоскостью основания — 60° .

588. Найдите площадь многоугольника, по которому плоскость пересекает:

- а) правильную треугольную пирамиду со стороной основания a и боковым ребром $2a$, учитывая, что плоскость проходит

Рис. 161

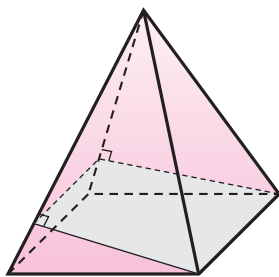
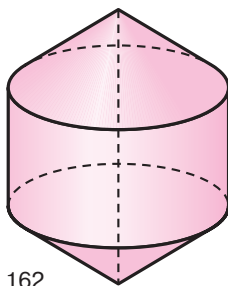


Рис. 162



через середины двух боковых ребер перпендикулярно основанию пирамиды;

б) правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания a и двугранным углом при основании в 60° , учитывая, что плоскость проходит через сторону основания перпендикулярно противоположной боковой грани (рис. 161).

589. Равнобедренная трапеция, основания которой равны 6 см и 10 см, а острый угол — 60° , вращается вокруг большего основания. Найдите поверхность и объем полученного тела (рис. 162).

* * *

590. Через точки F и G , взятые на стороне AB треугольника ABC , параллельно сторонам AC и BC проведены прямые, пересекающие сторону AC в точках F_1 и G_1 , а сторону BC — в точках F_2 и G_2 . Докажите, что площадь треугольника CFG вдвое меньше суммы площадей трапеций GFF_1G_1 и GFF_2G_2 .

591. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки M и N . Отрезки AN и CM пересекаются в точке Q . Найдите площадь четырехугольника $QMBN$, учитывая, что площади треугольников AQC , AQM и CQN равны соответственно S_1 , S_2 и S_3 .

592. Функция $y = f(x)$ определена на множестве действительных чисел, принимает действительные значения и удовлетворяет условию

$$x(f(x) + f(-x) + 4) + 2f(x) + 2 = 0.$$

Найдите все такие функции.

593. Числа a , b и c удовлетворяют условиям

$$(4a + 2b + c)(9a + 3b + c) < 0 \text{ и } (9a - 3b + c)(16a - 4b + c) < 0.$$

Определите знак выражения $(a + b + c)(4a - 3b + c)$.

12. Логарифмические выражения

Мы уже умеем по значению b степени x^t и ее показателю t находить основание x степени, иными словами, решать уравнение вида $x^t = b$, где b и t — некоторые числа.

Пример 1. Решим уравнение $x^4 = 81$.

По определению арифметического корня находим, что $x = \sqrt[4]{81} = 3$. Учитывая, что показатель степени четный, находим другой корень этого уравнения — число $-\sqrt[4]{81}$, т. е. число -3 .

Теперь поставим задачу нахождения показателя t степени x^t по ее значению b и основанию x , иными словами, задачу решения уравнения вида $x^t = b$, где b и x — некоторые числа.

Пример 2. Решим уравнение $3^t = 81$.

Это уравнение можно записать как $3^t = 3^4$. Учитывая следствие 1 из параграфа 11, можем утверждать, что уравнение имеет единственный корень $t = 4$.

Обратим внимание на то, что при решении уравнения $3^t = 81$ мы его левую и правую части представили степенями с одним основанием 3. Но, например, уравнение $3^t = 8$ таким приемом решить не получится, так как число 8 не представляется рациональной степенью числа 3. Вместе с этим уравнение $3^t = 8$ имеет действительный корень, что показывает рисунок 163. Этот корень называют логарифмом числа 8 по

основанию 3 и обозначают $\log_3 8$. Таким образом, корнем уравнения $3^t = 8$ является число $\log_3 8$, приблизительно равное 1,89.

Логарифмом числа b при основании a , $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую нужно возвести основание a , чтобы получить число b .

Логарифм числа b при основании a обозначают $\log_a b$.

Пример 3.

а) $\log_3 81 = 4$, так как $3^4 = 81$;

б) $\log_{13} 13 = 1$, так как $13^1 = 13$;

в) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$, так как $3^{-4} = \frac{1}{81}$;

г) $\log_{32} 1 = 0$, так как $32^0 = 1$.

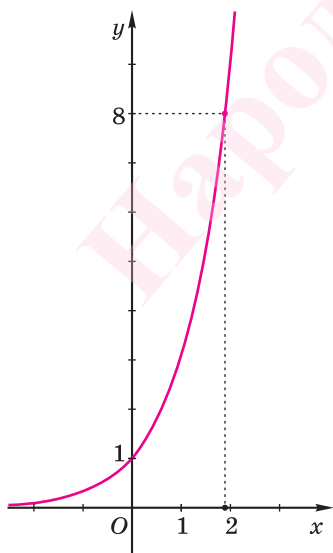


Рис. 163

Таким образом, учитывая определение логарифма числа, корень уравнения $a^t = b$ можно записать как $t = \log_a b$. Иными словами, равенства $a^t = b$ и $t = \log_a b$ выражают одну и ту же связь между числами a , t и b , т. е. равносильны:

$$a^t = b \stackrel{\text{опр}}{\equiv} t = \log_a b.$$

Пример 4. Решим уравнение $\log_4 (2y - 3) = \frac{1}{2}$.

Определение логарифма позволяет данное уравнение заметить равносильным уравнением $4^{\frac{1}{2}} = 2y - 3$, корнем которого является число 2,5.

Определение логарифма коротко можно представить равенством

$$a^{\log_a b} = b,$$

которое называют *основным логарифмическим тождеством*.

Пример 5. Вычислим значение выражения $7^{-3\log_7 10}$.

Используем свойство возведения степени в степень и основное логарифмическое тождество:

$$7^{-3\log_7 10} = (7^{\log_7 10})^{-3} = 10^{-3} = \frac{1}{1000}.$$

Из свойств показательной функции следует, что выражение $\log_a b$ имеет значение только при $b > 0$.

Пример 6. Найдем область определения выражения

$$\log_{2x+4} \frac{7-x}{7+4x}.$$

Данное выражение имеет значение, если основание логарифма $2x + 4$ положительно и не равно единице, а подлогарифмическое выражение $\frac{7-x}{1+x}$ положительно, т. е. если истин-

на система условий
$$\begin{cases} 2x + 4 > 0, \\ 2x + 4 \neq 1, \\ \frac{7-x}{7+4x} > 0, \end{cases}$$
 которая равносильна системе
$$\begin{cases} x > -2, \\ x \neq -1,5, \\ -1,75 < x < 7. \end{cases}$$
 Эта система дает (рис. 164) такую равносиль-

ную совокупность условий
$$\begin{cases} -1,75 < x < -1,5, \\ -1,5 < x < 7 \end{cases}.$$

Из определения логарифма следует, что



Рис. 164

$$\log_a 1 = 0; \log_a a = 1, \log_a a^t = t.$$

Действие нахождения логарифма числа называется *логарифмированием*.

Введение действия логарифмирования порождает новый класс *логарифмических выражений*, т. е. выражений, которые содержат по крайней мере одно действие нахождения логарифма из выражения с переменной. При преобразованиях логарифмических выражений используются свойства действия логарифмирования. Установим эти свойства.

Теорема 5. *При любом положительном и не равном единице основании:*

- *логарифм произведения положительных множителей равен сумме их логарифмов:*

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c;$$

- *логарифм частного с положительными делимым и делителем равен разности логарифмов делимого и делителя:*

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$$

- *логарифм любой действительной степени положительного числа равен произведению показателя степени и логарифма основания:*

$$\log_a b^r = r \log_a b.$$

Доказательство. Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$, $b > 0$ и $c > 0$, r — любое действительное число.

Основное логарифмическое тождество позволяет записать равенства:

$$a^{\log_a b} = b, \quad a^{\log_a c} = c. \quad (1)$$

Перемножив их, получим:

$$a^{\log_a b + \log_a c} = bc,$$

откуда, по определению логарифма:

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c.$$

Если разделить первое равенство из (1) на второе, то получим, что

$$a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{b}{c},$$

откуда, по определению логарифма:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$$

Возведя первое равенство из (1) в степень с показателем r , придем к равенству

$$a^{r \log_a b} = b^r,$$

откуда, по определению логарифма:

$$\log_a b^r = r \log_a b.$$

Обращаем внимание на то, что при применениях тождеств, установленных теоремой 5, нужно следить за тем, чтобы все подлогарифмические выражения были положительными.

Пример 7. Прологарифмируем выражение:

а) $(v^3 - 3)^4$; б) $m(m - 3)$.

а) Получим $\log_a (v^3 - 3)^4 = 4 \log_a |v^3 - 3|$.

б) Выражение $m(m - 3)$ можно логарифмировать, если истинно условие $m(m - 3) > 0$, т. е. если множители m и $(m - 3)$ или оба положительны, или оба отрицательны.

Если оба множителя m и $(m - 3)$ положительны, т. е. если $m > 3$, то $\log_a m(m - 3) = \log_a m + \log_a (m - 3)$. А если оба множителя m и $(m - 3)$ отрицательны, т. е. если $m < 0$, то $\log_a m(m - 3) = \log_a (-m) + \log_a (3 - m)$.

Действие, обратное логарифмированию, называют *потенцированием*.

Пример 8. Пропотенцируем выражение $2 \log_3 5 - 2,5 \log_3 4$.

Будем последовательно получать:

$$2 \log_3 5 - 2,5 \log_3 4 = \log_3 5^2 - \log_3 4^{2,5} = \log_3 \frac{5^2}{4^{2,5}} = \log_3 \frac{5^2}{2^5} = \log_3 \frac{25}{32}.$$

Логарифмы чисел находят с помощью специальных таблиц или калькулятора. И в том, и в другом случае находят десятичные или натуральные логарифмы.

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10.

Для десятичного логарифма вместо $\log_{10} x$ пишут $\lg x$.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e , где e — иррациональное число, приближенно равное 2,718281828... . Число e , как и число π ,

играет важную роль во многих разделах математики и в ее применениях.

Для натурального логарифма вместо $\log_e x$ пишут $\ln x$.

Для вычислений достаточно иметь возможность находить логарифмы по одному основанию, так как тогда можно найти логарифм числа по другому основанию. Это позволяет делать формула перехода к другому основанию.

Теорема 6. *Логарифм числа по данному основанию равен логарифму числа по новому основанию, деленному на логарифм данного основания по новому основанию:*

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Доказательство. Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$, $c > 0$ и $c \neq 1$ и $b > 0$. Тогда, в соответствии с основным логарифмическим тождеством, можем записать $a^{\log_a b} = b$. Прологарифмировав это равенство по основанию c , получим $\log_c a^{\log_a b} = \log_c b$, или, используя свойство логарифма степени, $\log_a b \log_c a = \log_c b$. Отсюда

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Пример 9. Найдем, через сколько лет удвоится пятипроцентный вклад в банк.

Пусть имеется вклад в a р. Тогда через n лет пятипроцентный вклад станет равным $(1,05)^n a$. Нас интересует такое значение переменной n , при котором вклад станет больше в два раза, т. е. $2a$. Получили уравнение $(1,05)^n a = 2a$. Решим его:

$$(1,05)^n a = 2a \equiv (1,05)^n = 2 \equiv n = \log_{1,05} 2.$$

Вычисления проведем с помощью калькулятора, на котором есть клавиша для нахождения десятичных логарифмов:

$$n = \log_{1,05} 2 = \frac{\lg 2}{\lg 1,05} \approx \frac{0,3010}{0,0212} \approx 14,2.$$

Таким образом, удвоение пятипроцентного вклада произойдет через 14,2 года.

Открытие логарифмов было вызвано в XVI в. быстрым развитием астрономии и усложнением астрономических вычислений, которые имели непосредственное практическое значение при определении местонахождения судов по Солнцу и другим звездам. Логарифмы быстро вошли в практику. Первые логарифмические таблицы были составлены в одно время

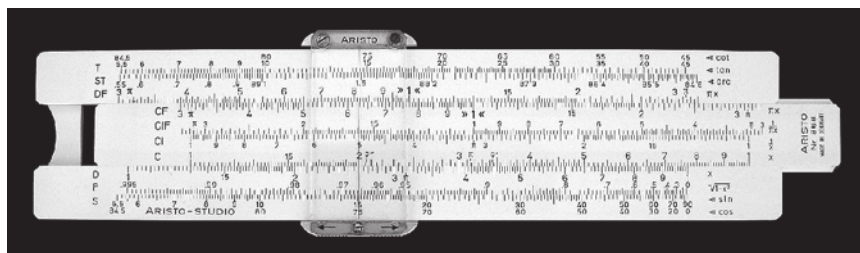


Рис. 165

и независимо друг от друга шотландским математиком Джоном Непером (1550—1617) и швейцарским математиком и астрономом Йобстом Бюрги (1552—1632). В 1623 г. английский математик Эдмунд Гантер изобрел логарифмическую линейку, с помощью которой действия над числами — умножение, деление — заменяются действиями сложения и вычитания над логарифмами этих чисел. На рисунке 165 показана одна из логарифмических линеек. Сейчас нужные вычисления проводятся с помощью калькуляторов. Леонард Эйлер (1707—1783) установил, что действие логарифмирования является обратным действием возведения в степень. Термин *логарифм* предложен Джоном Непером. Современное определение логарифма впервые дано в 1742 г. английским математиком Вильямом Гардинером.

- ?
1. Что называют логарифмом числа по данному основанию?
 2. Как обозначают логарифм числа b по основанию a ?
 3. Каким может быть основание логарифма; подлогарифмическое выражение?
 4. Запишите основное логарифмическое тождество.
 5. Как называется действие нахождения логарифма числа; действие нахождения числа по его логарифму?
 6. Чему равны логарифм числа 1 и логарифм основания?
 7. Чему равен логарифм произведения; логарифм частного; логарифм степени?
 8. Какой логарифм называется десятичным; натуральным?
 9. Запишите формулу перехода к логарифму с другим основанием.

594. Найдите логарифм по основанию 3 числа:

- | | | | |
|--------|--------------------|------------------------------|---------------------------------|
| а) 3; | г) 81; | ж) $\frac{1}{9}$; | к) $\frac{1}{243}$; |
| б) 9; | д) 1; | з) $\sqrt[3]{3}$; | л) $9\sqrt[4]{3}$; |
| в) 27; | е) $\frac{1}{3}$; | и) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; | м) $\frac{729}{\sqrt[5]{27}}$. |

595. Определите, истинно ли равенство:

- а) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; г) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$; ж) $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 27 = -6$;
б) $\log_5 0,04 = -2$; д) $\lg 0,01 = -2$; з) $\log_{\sqrt{5}} 0,2 = -2$;
в) $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$; е) $\log_{0,5} 4 = -2$; и) $\log_{2\sqrt{2}} 128 = \frac{14}{3}$.

596. Найдите значение выражения:

- а) $\log_{0,5} 1$; д) $\log_5 625$; и) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$;
б) $\log_5 \frac{1}{125}$; е) $\log_{0,5} 0,125$; к) $\log_{\frac{1}{6}} 36$;
в) $\log_4 \frac{1}{16}$; ж) $\log_{0,5} \frac{1}{2}$; л) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$;
г) $\log_6 216$; з) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; м) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$.

597. Определите, между какими целыми числами находится значение выражения:

- а) $\log_{10} 50$; б) $\log_2 10$; в) $\log_2 0,5$.

598. Учитывая, что $\lg 3 = 0,4771$, определите количество цифр числа 3^{100} .

599. Логарифмом с основанием:

- а) 4 запишите число 2; д) 3 запишите число 2;
б) 4 запишите число $\frac{1}{2}$; е) 3 запишите число -1;
в) 2 запишите число 0; ж) 5 запишите число 1;
г) 2 запишите число 3; з) 3 запишите число -3.

600. Найдите значение выражения:

- а) $3^{\log_3 18}$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}} 2}$; ж) $0,3^{2\log_{0,3} 4}$; к) $7^{\frac{1}{2}\log_7 9}$;
б) $8^{\log_2 5}$; д) $9^{\log_3 12}$; з) $16^{\log_4 7}$; л) $3^{5\log_3 2}$;
в) $0,125^{\log_{0,5} 1}$; е) $5^{\log_5 16}$; и) $10^{\log_{10} 2}$; м) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 6}$.

601. Упростите выражение:

- а) $1,7^{\log_{1,7} 2}$; г) $10^{1-\lg 2}$; ж) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4\log_1 3}{2}}$; к) $2^{\log_2 5}$;
б) $5^{1+\log_5 3}$; д) $5^{-3\log_5 \frac{1}{2}}$; з) $3^{2-\log_3 18}$; л) $3,8^{\log_{3,8} 11}$;
в) $4^{2\log_4 3}$; е) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+\log_{\frac{1}{7}} 2}$; и) $\pi^{\log_{\pi} 5,2}$; м) $6^{-2\log_6 5}$.

602. Найдите основание x логарифма, учитывая, что:

- а) $\log_x 2 = 2$; г) $\log_x \frac{1}{243} = -5$; ж) $\log_x 2\sqrt[3]{2} = -6$;
б) $\log_x N = N$; д) $\log_x 3\frac{3}{8} = -3$; з) $\log_x \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} = 2$;
в) $\log_x 243 = 5$; е) $\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{4}$; и) $\log_x \sqrt[5]{2} = -\frac{3}{5}$.

603. Решите уравнение:

- а) $\log_5 x = 4$; г) $\log_2 (5 - x) = 3$; ж) $\log_x \frac{1}{7} = -1$;
б) $\log_6 x = 3$; д) $\log_{\frac{1}{6}} (0,5 + x) = -1$; з) $\log_x 27 = -3$;
в) $\log_3 (x + 2) = 3$; е) $\log_x 27 = 3$; и) $\log_x \sqrt{5} = -4$.

604. Найдите значение переменной, учитывая, что:

- а) $\log_a 2\sqrt[3]{2} = -2$; д) $\log_{2\sqrt[4]{5}} v = -4$; и) $\log_z \frac{\sqrt[5]{8}}{2} = -0,4$;
б) $\log_{3\sqrt[3]{3}} b = -2,25$; е) $\log_{3\sqrt[4]{3}} w = -\frac{2}{5}$; к) $\log_p \frac{\sqrt[5]{8}}{2} = 0,4$;
в) $\log_{2\sqrt[5]{2}} \frac{1}{8} = c$; ж) $\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt[4]{2} = x$; л) $\log_q \frac{\sqrt[5]{9}}{3} = -0,6$;
г) $\log_u 0,0625 = -4$; з) $\log_{4\sqrt[4]{4}} 2^{-6} = y$; м) $\log_{0,32} \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right) = r$.

605. Найдите область определения выражения:

- а) $\log_{\frac{1}{2}} (4 - x)$; е) $\log_{\frac{1}{4}} (-x^2)$;
б) $\log_8 \frac{5}{2x-1}$; ж) $\log_6 \frac{1}{1-2x}$;
в) $\log_{0,2} (7 - x)$; з) $\log_{0,7} (-2x^3)$;
г) $\log_6 (49 - x^2)$; и) $\log_3 (1 - x^3)$;
д) $\log_{\frac{1}{4}} (x^3 + x^2 - 6x)$; к) $\log_x (2x - 1)$.

606. Определите, при какой зависимости между переменными a и b истинно равенство:

- а) $\log_{(2b-a)} (2a - b) = 1$; б) $\log_k (2a - b) = 0$.

607. Решите уравнение:

- а) $2^x = 5$; в) $4^{2x+3} = 5$; д) $5^{2x+1} = 7$;
б) $1,2^x = 4$; г) $7^{1-2x} = 2$; е) $9^{1-2x} = 18$.

608. Определите, через сколько лет количество жителей города увеличится на 20 %, если считать, что это количество ежегодно увеличивается на 1 %.

609. Учитывая, что $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$, прологарифмируйте по основанию 10 выражение:

- а) $100\sqrt{ab^3c}$; г) $\frac{b^{\frac{2}{3}}}{10^5 a^6 c^5}$; ж) $\frac{0,01c^{\frac{2}{3}}}{a^2 b^3}$;
 б) $10^3 a^4 b^{\frac{1}{2}} c^{-3}$; д) $\sqrt[3]{10 a^{\frac{1}{3}} b^4 c^{-\frac{1}{2}}}$; з) $\frac{c^{\frac{7}{2}}}{10^7 a^3 b^8}$.
 в) $\frac{a^5}{0,1c^2 \sqrt{b}}$; е) $10^{-4} a^2 b^5 c^{\frac{2}{3}}$;

610. Найдите значение выражения:

- а) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$; д) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$;
 б) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$; е) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$;
 в) $\log_{10} 8 + \log_{10} 125$; ж) $\log_5 75 - \log_5 3$;
 г) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$; з) $\log_8 \frac{1}{16} - \log_8 32$.

611. Упростите выражение:

- а) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$;
 б) $\log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 10$;
 в) $\frac{1}{2} \log_7 36 - \log_7 14 - 3 \log_7 \sqrt[3]{21}$;
 г) $2 \log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 400 + 3 \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$.

612. Найдите выражение x , учитывая, что a и b — положительные числа и:

- а) $\log_3 x = 4 \log_3 a + 7 \log_3 b$; в) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3} \log_{\frac{1}{2}} a - \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{2}} b$;
 б) $\log_5 x = 2 \log_5 a - 3 \log_5 b$; г) $\log_{\frac{2}{3}} x = \frac{1}{4} \log_{\frac{2}{3}} a - \frac{4}{7} \log_{\frac{2}{3}} b$.

613. Найдите выражение A , учитывая, что:

- а) $\log_a A = 3 + 2 \log_a b - \frac{1}{2} \log_a x - 4 \log_a y$;
 б) $\ln A = \ln \sin x - \ln \cos x + \frac{1}{2} \ln x$;
 в) $\lg A = -1 + \frac{1}{2} \lg (x-1) + \frac{1}{2} \lg (x+1) - 3 \lg x$.

614. Найдите значение переменной x , учитывая, что:

- а) $\log_6 x = 3\log_6 2 + 0,5\log_6 25 - 2\log_6 3$;
б) $\log_4 x = \frac{1}{3}\log_4 216 - 2\log_4 10 + 4\log_4 3$;
в) $\lg x = \frac{1}{2}\lg 5a - 3\lg b + 4\lg c$;
г) $\lg x = 5\lg m + \frac{2}{3}\lg n - \frac{1}{4}\lg p$.

615. Докажите, что если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ и r — произвольное действительное число, то:

- а) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$; б) $\log_{a^r} b = \frac{\log_a b}{r}$; в) $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$.

616. Вычислите на калькуляторе:

- а) $\lg 23$; в) $\lg 7$; д) $\lg 0,37$; ж) $\lg \frac{2}{3}$;
б) $\lg 81$; г) $\lg 2$; е) $\lg 0,17$; з) $\lg \frac{6}{7}$.

617. Вычислите:

- а) $\log_8 12 + \log_{\frac{1}{8}} 3$; д) $\log_3 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 5 \cdot \log_{25} 27$;
б) $\log_{27} 18 + \log_{\frac{1}{27}} 2$; е) $\frac{\log_{\sqrt[3]{5}} 27}{\log_{25} \sqrt{3}}$;
в) $\frac{\log_9 32}{\log_9 4}$; ж) $6^{\frac{\log_3 5}{1 + \log_3 2}}$;
г) $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$; з) $5^{\frac{\log_5 8}{1 + \log_5 2}}$.

618. УчИтывая, что $\lg 3 \approx 0,4771$ и $\lg 5 \approx 0,6990$, с точностью до тысячной найдите значение выражения:

- а) $\log_{30} 60$; б) $\log_{36} 15$.

619. УчИтывая, что $\log_5 2 = a$ и $\log_5 3 = b$, найдите:

- а) $\log_5 72$; б) $\log_5 15$; в) $\log_5 12$; г) $\log_5 30$.

620. УчИтывая, что:

- а) $\log_{12} 18 = a$, найдите $\log_8 9$;
б) $\log_{\sqrt[3]{45}} 25 = a$, найдите $\log_9 15$;
в) $\log_9 20 = a$, $\lg 2 = b$, найдите $\log_{250} 120$;
г) $\log_{25} 28 = c$, $\log_{14} 2 = d$, найдите $\log_{686} 560$.

621. Используя десятичные логарифмы, найдите на калькуляторе с точностью до тысячной значение выражения:

а) $\log_7 25$; б) $\log_5 8$; в) $\log_9 0,75$; г) $\log_{0,75} 1,13$.

622. Решите уравнение:

а) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$; г) $\log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x = 9$;

б) $\log_3 x = 9\log_{27} 8 - 3\log_3 4$; д) $\log_9 x^2 - \log_{\sqrt{3}} x = 3$;

в) $\log_2 x + \log_8 x = 8$; е) $\log_4 x - \log_{16} x = \frac{1}{4}$.

623. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\log_3 8}{\log_3 16}$; г) $\frac{\log_7 8}{\log_7 15 - \log_7 30}$; ж) $\frac{\log_2 4 + \log_2 \sqrt{10}}{\log_2 20 + 3\log_2 2}$;

б) $\frac{\log_5 27}{\log_5 9}$; д) $\frac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72}$; з) $\frac{3\log_7 2 - \frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2 + \frac{1}{3}\log_5 27}$;

в) $\frac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$; е) $\frac{\log_7 14 - \frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30 - \frac{1}{2}\log_6 150}$; и) $\frac{3\log_7 2 - \log_7 4}{\log_7 2 + \log_7 4}$.

624. Найдите значение переменной, учитывая, что:

а) $\frac{1}{5} \log_{0,4} \sqrt[3]{50} = r$; д) $\log_y (2(2 - \sqrt{3})) = 2$;

б) $\log_{(x-2)} 9 = 2$; е) $\log_{(\sqrt{2}+1)} (3 + 2\sqrt{2}) = t$;

в) $\log_s (3 - 2\sqrt{2}) = 2$; ж) $\log_{(l-2)} (l^3 - 14) = 3$;

г) $\log_{(3-k)} 2 (k^2 + 2k - 1) = 2$; з) $\log_2 (m^2 + 6m + 17) = 3$.

625. Пропотенцируйте равенство:

а) $\lg x = m \lg N$; ж) $\lg x = 3 \lg m + 4 \lg n$;

б) $\lg x = \frac{1}{m} \lg N$; з) $\lg x = \frac{3}{4} (\lg a + \lg b)$;

в) $\lg x = \lg N_1 - \lg N_2$; и) $2 \lg x = -\lg (6 - x^2)$;

г) $\lg x = \lg N_1 + \lg N_2$; к) $\lg x = 2 \lg a - 3 \lg b + 4 \lg c$;

д) $\lg x = \frac{2}{3} \lg a$; л) $\lg x = -\lg a - 2 \lg b - 3 \lg c$;

е) $\lg x = 2 \lg a - 3 \lg b$; м) $\lg x = \frac{2}{3} \lg a + \frac{3}{2} \lg b$.

626. Решите уравнение:

- а) $5\log_2 c = 3\log_2 c + 6$;
б) $2\log_3 d - 3\log_9 81 = 5\log_3 d$;
в) $\lg x = \lg 2 + \lg \sin \alpha + \lg \cos \alpha$;
г) $\lg x = \lg \sin \beta - \lg \cos \beta + \lg \operatorname{ctg} \beta$;
д) $(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 6 = 0$;
е) $3\log_3^2 u + 7\log_3 u - 6 = 0$;
ж) $(\log_3 f)^2 - 6\log_3 f + 9 = 0$;
з) $2\log_{12}^2 t - 7\log_{12} t + 6 = 0$.

627. Решите уравнение:

- а) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$; д) $\log_2^2 x - 9\log_8 x = 4$;
б) $\log_{64} y + \log_8 y = 0,5$; е) $16\log_{16}^2 x + 3\log_4 x - 1 = 0$;
в) $\log_{81} z + \log_9 z + \log_3 z = 3,5$; ж) $\log_3^2 x + 5\log_9 x - 1,5 = 0$;
г) $\log_a t + \log_{a^2} t + \log_{a^4} t = \frac{3}{4}$; з) $\log_3^2 x - 15\log_{27} x + 6 = 0$.

628. Докажите, что:

- а) $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2$; в) $4^{\log_5 7} = 7^{\log_5 4}$;
б) $\log_3 7 + \log_7 3 > 2$; г) $3^{\log_2 5} = 5^{\log_2 3}$.

629. Учитывая, что a, b, c — положительные и отличные от единицы числа, докажите, что:

- а) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$; б) $\log_{ab} c = \frac{1}{\frac{1}{\log_a c} + \frac{1}{\log_b c}}$.
-

630. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(2; 1)$ и $B(3; 5)$, и найдите площадь треугольника, ограниченного прямой AB и координатными осями.

631. Найдите квадратную функцию, график которой проходит через точки $(-1; 0)$, $(1; 4)$ и $(2; 3)$, и найдите, чему равна сумма тех целых значений аргумента, при которых эта функция принимает положительные значения.

632. Найдите квадратную функцию, график которой пересекает ось ординат в точке 1, симметричен относительно прямой $x + 2 = 0$ и проходит через точку $(2; 7)$.

633. Квадратный трехчлен $f(x)$ при $x = 1$ принимает наименьшее значение, равное нулю, а график функции $y = f(x)$ проходит через точку $(-1; 4)$. Запишите уравнение касательной к этому графику, параллельной прямой $4x + y - 5 = 0$.

634. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = (x + 2)^2 - 1$, проходящей через начало координат.

635. Определите, с помощью каких преобразований из графика функции $y = \frac{1}{x}$ можно получить график функции:

а) $y = \frac{1}{x - 2}$; в) $y = \frac{-2}{x - 2}$;

б) $y = \frac{1}{x - 2} + 1$; г) $y = \frac{3x - 2}{x - 2}$.

636. В равнобедренный треугольник с периметром 64 см вписана окружность. Прямая, параллельная основанию треугольника и касающаяся окружности, отсекает от него трапецию с периметром 60 см. Найдите радиус окружности.

637. Около окружности с радиусом 7 описан прямоугольный треугольник, биссектриса прямого угла которого делится центром окружности в отношении 7 : 5. Найдите стороны треугольника.

638. Две стороны треугольника равны 112 см и 120 см, а высота, проведенная к меньшей из них, — 96 см. Найдите радиус описанной окружности.

639. В окружность с радиусом 65 см вписан остроугольный треугольник, в котором одна высота равна 72 см, а сторона, к которой она проведена, находится на расстоянии 16 см от центра окружности. Найдите стороны треугольника.

640. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, основание которого отстоит от центра окружности на 7 см, а боковая сторона — на 15 см.

* * *

641. Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ расположены внутри параболы $y = x^2$ так, что ω_1 касается параболы в ее вершине и имеет радиус 0,5, окружность ω_{m+1} при каждом m касает-

ся окружности ω_m и ветвей параболы (рис. 166). Найдите радиус окружности ω_{2009} .

642. Докажите, что истинно равенство

$$\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \\ + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 - n + 1} = \operatorname{arctg} n.$$

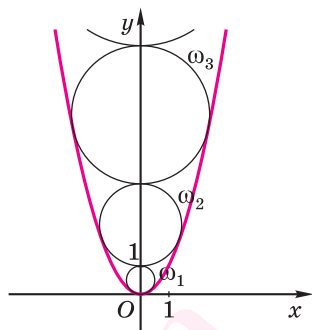


Рис. 166

643. Найдите сумму $\left\{ \frac{a}{m} \right\} + \left\{ \frac{a+b}{m} \right\} +$

$$+ \left\{ \frac{a+2b}{m} \right\} + \dots + \left\{ \frac{a+(m-1)b}{m} \right\}, \text{ где } a \text{ — некоторое целое число,}$$

натуральные числа b и m взаимно просты, а $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x , т. е. разность между x и наибольшим целым числом, не превосходящим x : $\{x\} = x - [x]$.

644. Решите уравнение

$$\sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{3}} + \sqrt{x^2 + y^2 - xy\sqrt{3}} + \sqrt{16 + y^2 - 4y\sqrt{3}} = 5.$$

13. Логарифмическая функция

Логарифмической функцией называется функция, задаваемая формулой

$$y = \log_a x,$$

где a — некоторое действительное число, $a > 0$ и $a \neq 1$.

Теорема 7. Областью определения логарифмической функции является множество R_+ всех положительных действительных чисел, а область значений — множество R всех действительных чисел.

Доказательство. Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$. Тогда выражение $\log_a x$, в соответствии с определением логарифма числа, имеет значение, если значение аргумента — положительное действительное число, т. е. областью определения логарифмической функции является множество R_+ всех положительных действительных чисел.

Любое действительное число b может быть значением выражения $\log_a x$, так как уравнение $\log_a x = b$ имеет корень при любом действительном b . Значит, область значений логариф-

мической функции является множество R всех действительных чисел.

Теорема 8. *Логарифмическая функция на множестве всех положительных действительных чисел является возрастающей при $a > 1$ и убывающей при $0 < a < 1$, а ее график проходит через точку $(1; 0)$.*

Доказательство. Пусть $a > 1$ и $0 < x_1 < x_2$. Если допустить, что $\log_a x_1 \geq \log_a x_2$, то, с учетом возрастания показательной функции с большим единицы основанием (см. теорему 2 из параграфа 11 и следствие из нее), получим, что $a^{\log_a x_1} \geq a^{\log_a x_2}$, или $x_1 \geq x_2$, что противоречит условию $x_1 < x_2$. Потому остается признать, что $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

Пусть $0 < a < 1$, тогда $\frac{1}{a} > 1$. Если $0 < x_1 < x_2$, то по доказанному $\log_{\frac{1}{a}} x_1 < \log_{\frac{1}{a}} x_2$. После перехода к основанию a получим, что $-\log_a x_1 < -\log_a x_2$, или $\log_a x_1 > \log_a x_2$.

Поскольку $\log_a 1 = 0$, то точка $(1; 0)$ принадлежит графику логарифмической функции.

Из доказанной теоремы непосредственно получаем следующие утверждения.

Следствие 2. *Значения логарифмической функции с основанием, большим единицы, на промежутке $(0; 1)$ отрицательны, а на промежутке $(1; +\infty)$ положительны.*

Следствие 3. *Значения логарифмической функции с положительным и меньшим единицы основанием на промежутке $(0; 1)$ положительны, а на промежутке $(1; +\infty)$ отрицательны.*

Построим график функции $y = \log_2 x$. Для этого нанесем на координатную плоскость некоторые точки этого графика, составив предварительно таблицу значений функции.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

Используя построенные точки и установленные свойства логарифмической функции, получим график функции $y = \log_2 x$, который представлен на рисунке 167.

Для построения графика функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ учтем равенство $\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$ и используем то, что график функции $y = -f(x)$

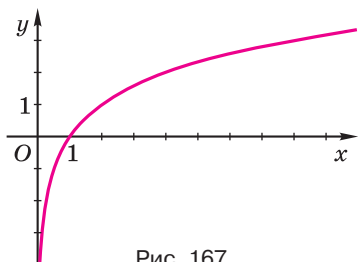


Рис. 167

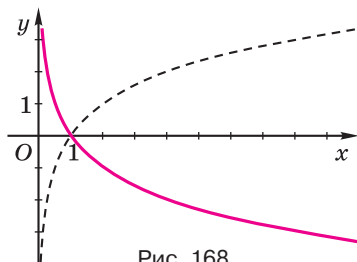


Рис. 168

получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси абсцисс. Указанное преобразование проведено на рисунке 168.

Теорема 9. *График функции $y = \log_a x$ симметричен графику функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$.*

Доказательство. Пусть точка $P(u; v)$ принадлежит графику функции $y = a^x$ (рис. 169).

Тогда ее координаты u и v удовлетворяют равенству $v = a^u$. Но тогда истинно и равенство $u = \log_a v$. А это означает, что точка $Q(v; u)$ принадлежит графику функции $y = \log_a x$.

Так же доказывается, что если точка $R(p; q)$ принадлежит графику функции $y = \log_a x$, то точка $S(q; p)$ принадлежит графику функции $y = a^x$.

Для завершения доказательства остается заметить, что точки $(c; d)$ и $(d; c)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

Теорема 10. *Если положительные основания a и b логарифмов $\log_a x$ и $\log_b x$ оба больше единицы или оба меньше ее и $a < b$, то $\log_a x > \log_b x$ при $x > 1$ и $\log_a x < \log_b x$ при $0 < x < 1$.*

Доказательство. Сравним значения выражений $\log_a x$ и $\log_b x$:

$$\log_b x - \log_a x = \frac{\log_a x}{\log_a b} - \log_a x = \log_a x \left(\frac{1}{\log_a b} - 1 \right) = \log_a x (\log_b a - 1).$$

Пусть $b > a > 1$, тогда, с учетом возрастания логарифмической функции с большим единицы основанием, получим $\log_b a < 1$, или $\log_b a - 1 < 0$.

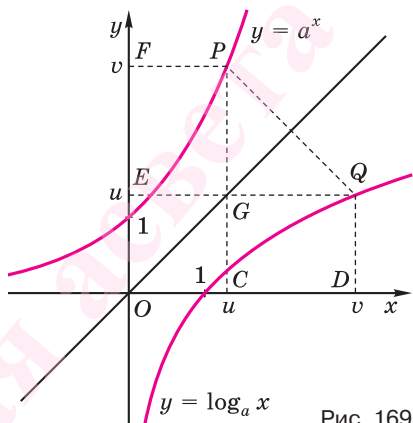


Рис. 169

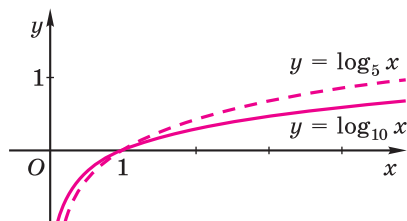


Рис. 170

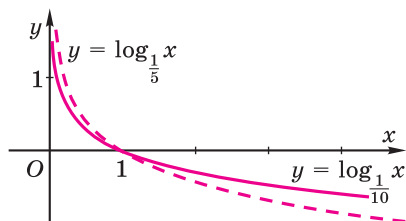


Рис. 171

Если $x > 1$, то $\log_a x > 0$, и потому $\log_a x (\log_b a - 1) = \log_b x - \log_a x < 0$, или $\log_b x < \log_a x$.

Если $0 < x < 1$, то $\log_a x < 0$, и потому $\log_a x (\log_b a - 1) = \log_b x - \log_a x > 0$, или $\log_b x > \log_a x$.

Пусть теперь $1 > b > a > 0$. Поскольку логарифмическая функция с меньшим единицы основанием убывает, то $\log_b a > 1$, или $\log_b a - 1 > 0$.

Если $x > 1$, то $\log_a x < 0$, и потому $\log_a x (\log_b a - 1) = \log_b x - \log_a x < 0$, а если $0 < x < 1$, то $\log_a x > 0$, и потому $\log_a x (\log_b a - 1) = \log_b x - \log_a x > 0$.

В соответствии с теоремой 10 с увеличением основания a график функции $y = \log_a x$ на промежутке $(0; 1)$ располагается более высоко, а на промежутке $(1; +\infty)$ — более низко.

График любой логарифмической функции $y = \log_a x$ с основанием a , большим единицы, похож на график функции $y = \log_2 x$. На рисунке 170 представлены графики функций $y = \log_5 x$ и $y = \lg x$.

График любой логарифмической функции $y = \log_a x$ с положительным основанием a , меньшим единицы, похож на график функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. На рисунке 171 приведены графики функций $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ и $y = \log_{\frac{1}{10}} x$.

- ?
1. Какая функция называется логарифмической?
 2. Какое множество является областью определения логарифмической функции; областью значений логарифмической функции?
 3. Какой является логарифмическая функция, если ее основание больше единицы?
 4. Какой является логарифмическая функция, если ее основание положительно и меньше единицы?
 5. Через какую точку проходят графики всех логарифмических функций?
 6. Каким неравенством связаны значения логарифмических функций с разными основаниями при одном значении аргумента?

645. Определите, каким — положительным или отрицательным — является число:

а) $\log_3 4,5$; б) $\log_3 0,45$; в) $\log_5 25,3$; г) $\log_{0,5} 9,6$.

646. Сравните с единицей число x , учитывая, что:

а) $\log_3 x = -0,3$; б) $\log_{\frac{1}{3}} x = 1,7$; в) $\log_2 x = 1,3$.

647. Сравните числа:

а) $\log_3 \frac{6}{5}$ и $\log_3 \frac{5}{6}$; в) $\log_{\frac{1}{3}} 9$ и $\log_{\frac{1}{3}} 17$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} e$ и $\log_{\frac{1}{2}} \pi$; г) $\log_2 \frac{\sqrt{5}}{2}$ и $\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$.

648. Найдите область определения функции:

а) $y = \log_4(x - 1)$; г) $y = \log_{\sqrt{2}}(4 - x^2)$;
б) $y = \log_3(x^2 + 2x)$; д) $y = \log_2|3 - x| - \log_2|x^3 - 8|$;
в) $y = \log_{0,3}(1 + x)$; е) $y = \log_{0,3}\sqrt{x + 1} + \log_{0,4}(1 - 8x^3)$.

649. Определите, какой — возрастающей или убывающей — является функция:

а) $y = \log_{0,075} x$; в) $y = \lg x$; д) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$;
б) $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$; г) $y = \ln x$; е) $y = \log_2 \frac{1}{x}$.

650. Изобразите схематически график функции:

а) $y = \lg x$; в) $y = \log_{0,4} x$; д) $y = \log_{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{5}} x$;
б) $y = \ln x$; г) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$; е) $y = \log_{\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{7}} x$.

651. Используя график функции $y = 2^x$, постройте график функции:

а) $y = 2^{-x}$; г) $y = -\log_2 x$; ж) $y = \log_2(x - 1)$;
б) $y = \log_2 x$; д) $y = \log_2 x + 5$; з) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$.
в) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; е) $y = \log_2(-x)$;

652. Используя график функции $y = 3^x$, постройте в этой же системе координат графики функций $y = \log_3 x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = -\log_3 x$.

653. Найдите область определения функции:

а) $y = \log_8 (x^2 - 3x - 4)$; г) $y = \log_{\sqrt{3}} (-x^2 + 5x + 6)$;

б) $y = \log_{0,7} \frac{x^2 - 9}{x + 5}$; д) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x - 4}{x^2 + 4}$;

в) $y = \log_{\pi} (2^x - 2)$; е) $y = \log_3 (3^{x-1} - 9)$.

654. Найдите область определения выражения:

а) $\log_2 \sin x$; б) $\log_3 (2^{x-1})$; в) $\log_{\frac{1}{2}} \cos x$; г) $\lg (1 - 3^x)$.

655. Найдите область определения, область значений и постройте график функции:

а) $y = \log_3 (x - 1)$; в) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x + 1)$; д) $y = 1 + \log_3 x$;

б) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 1$; г) $y = 1 + \log_3 (x - 1)$; е) $y = 1 + \frac{1}{2} \log_3 x$.

656. Найдите область определения, область значений и промежутки возрастания и убывания, построив график функции:

а) $y = |\log_3 x|$; в) $y = \log_2 |3 - x|$;

б) $y = \log_3 |x|$; г) $y = |1 - \log_2 x|$.

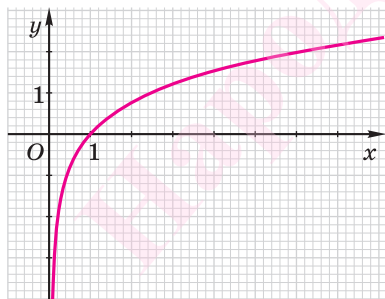


Рис. 172

657. Докажите, что функция $y = \log_2 (x^2 - 1)$ возрастает на промежутке $(1; +\infty)$.

658. По графику функции $y = \log_{2,5} x$, представленному на рисунке 172, найдите приближенно:

а) $\log_{2,5} 3$; в) $\log_{2,5} 5$;
б) $\log_{2,5} 0,34$; г) $\log_{2,5} 0,7$.

659. Установите, при каких значениях аргумента x функция $y = \log_2 (x^2 - 3)$:

- а) принимает положительные значения;
- б) принимает отрицательные значения;
- в) не определена.

660. Решите неравенство:

- а) $\log_5 x > \log_5 3$; в) $\lg x < \lg 4$; д) $\log_3 x < 2$;
б) $\log_{\frac{1}{5}} x \leq \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{8}$; г) $\ln x > \ln 0,5$; е) $\log_{0,4} x > 2$.

661. Решите уравнение:

- а) $\log_3 (5x - 1) = 2$; в) $\lg (3x - 1) = 0$; д) $\log_7 (x + 3) = 2$;
б) $\log_4 (2x - 3) = 1$; г) $\log_5 (3x + 1) = 2$; е) $\lg (2 - 5x) = 1$.

662. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на промежутке I , учитывая, что:

- а) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ и $I = [1; 4]$; в) $f(x) = \log_5 x$ и $I = \left[\frac{1}{5}; 1\right]$;
б) $f(x) = \log_9 x$ и $I = \left[\frac{1}{9}; 9\right]$; г) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $I = \left[\frac{1}{2}; 4\right]$.

663. Сравните значения выражений:

- а) $\frac{1}{2} + \lg 3$ и $\lg 19 - \lg 2$; в) $\frac{\lg 5 + \lg \sqrt{7}}{2}$ и $\lg \frac{5 + \sqrt{7}}{2}$;
б) $3(\lg 7 - \lg 5)$ и $\lg 9 - \frac{2}{3} \lg 8$; г) $\lg \lg \lg 50$ и $\lg^3 50$.

664. Решите графически уравнение:

- а) $\log_2 x = -x$; д) $\log_2 x = -x^2$; и) $\log_3 x = \frac{3}{x}$;
б) $\log_2 x = -x + 1$; е) $\log_{\frac{1}{2}} x = \cos x$; к) $\lg x = \frac{1}{2}x - 4$;
в) $2\log_2 x = -2x + 3$; ж) $2 = \log_{\frac{1}{2}} x$; л) $\lg x = \sqrt{x}$;
г) $\log_2 x = \sin x$; з) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2x - 5$; м) $\lg x = 2^{-x}$.

665. Сравните числа:

- а) $\log_2 10$ и $\log_5 30$; г) $\log_{0,2} \sqrt{2}$ и $\log_{0,7} 0,3$;
б) $\log_{0,3} 2$ и $\log_5 3$; д) $\log_{0,1} 0,25$ и $\log_{0,5} 0,3$;
в) $\log_3 5$ и $\log_7 4$; е) $\log_3 10$ и $\log_8 57$.

666. Определите, при каких значениях переменной x истинно неравенство:

- а) $\log_x 8 < \log_x 10$; б) $\log_x \frac{3}{4} < \log_x \frac{1}{2}$.

667. Докажите, что график логарифмической функции $y = f(x)$ является:

а) вогнутым при меньшем единицы основании, т. е. что истинно неравенство $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ для любых значений x_1 и x_2 аргумента;

б) выпуклым при большем единицы основании, т. е. что истинно неравенство $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ для любых значений x_1 и x_2 аргумента.

668. Найдите угол между образующей и высотой конуса, учитывая, что разверткой его боковой поверхности является сектор с дугой в 270° .

669. Прямоугольный треугольник вращается вокруг оси, содержащей гипотенузу. Найдите поверхность полученного тела, учитывая, что гипотенуза равна c , а острый угол треугольника — α .

670. Радиус основания конуса равен R , а образующая наклонена к плоскости основания под углом α . Через вершину конуса проведена плоскость под углом φ к его высоте. Найдите площадь полученного сечения.

671. Есть конус, радиус основания которого равен r и образующая — $2r$. Плоскость, параллельная основанию, делит его на два тела, полные поверхности которых равны. Определите образующую конуса, отсеченного этой плоскостью.

672. Найдите объем тела, полученного при вращении:

а) прямоугольного треугольника с катетами 10 см и 15 см вокруг оси, содержащей гипотенузу;

б) равнобедренного треугольника с боковой стороной 20 см и основанием 10 см вокруг оси, содержащей основание.

673. Треугольник ABC , у которого стороны AB и AC равны 13 см каждая, а сторона BC — 10 см, является основанием пирамиды $DABC$. Ее ребро AD перпендикулярно плоскости основания и равно 9 см. Найдите боковую поверхность пирамиды.

674. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна 39 см, а основание — 30 см. Каждый из двугранных углов при основании равен 45° . Найдите объем пирамиды.

675. Найдите объем конуса, у которого:

- а) диаметр основания равен 24 см, а высота — 38 см;
б) радиус основания равен $8\sqrt{3}$ см, а образующая составляет с осью конуса угол в 60° ;
в) осевым сечением является правильный треугольник со стороной a .

676. Найдите сумму корней уравнения:

- а) $z^2 - 3z + 2|z - 2| = 0$; в) $w^2 + 2w - |w + 3| = 21$;
б) $x^2 - 4x - |x + 1| - 11 = 0$; г) $t^2 + 4t - 2|t + 5| = 19$.

677. Решите уравнение:

- а) $|2a - 1| + 6a = |2a - 4| + 15$; в) $|d - 5| + 3d = |2d - 4| + 11$;
б) $|2 - c| - c = |2c - 1| - 21$; г) $|u + 3| - 7u = |u + 6| + 11$.

678. Найдите те значения параметра a , при которых имеет три корня уравнение:

- а) $|x^2 - 2x - 3| = a$; в) $|2 - 3t - t^2| = 5a$;
б) $|5 + 2y - y^2| = a$; г) $|3v^2 + 6v - 3| = -0,5a$.

* * *

679. Окружность, вписанная в треугольник ABC , делит медиану AM на три доли. Определите, как сторона BC относится к стороне AB и к стороне CA .

680. Определите, имеют ли общий корень уравнения $x^4 + ax + b = 0$ и $x^4 + cx + d = 0$ при условии $0 < a < c < d < b$.

681. Решите уравнение $2(2\cos 4x + 1)\cos x = 1$.

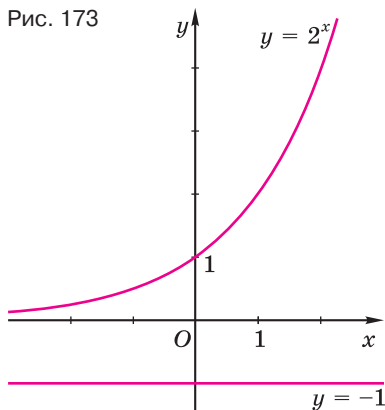
682. Можно ли в квадрате размерами 5×5 клеток закрасить 16 клеток так, чтобы в каждом квадрате размерами 2×2 было закрашено не более двух клеток?

14. Показательные уравнения, неравенства и их системы

При решении *показательных уравнений и неравенств*, т. е. уравнений и неравенств, в которых переменная содержится в показателе степени, используются свойства показательной функции:

- областью значений показательной функции $y = a^x$ является множество всех положительных действительных чисел;

Рис. 173



• если $a > 0$ и $a \neq 1$, то условия $a^x = a^b$ и $x = b$ являются равносильными;

• при $a > 1$ показательная функция $y = a^x$ является возрастающей, а при $0 < a < 1$ — убывающей.

Пример 1. Решим уравнение:

а) $2^{x^2+3x+4} = 4$;

б) $2^{3x-1} = 5$;

в) $2^{x+2} = -1$.

а) $2^{x^2+3x+4} = 4 \equiv 2^{x^2+3x+4} = 2^2 \equiv x^2 + 3x + 4 = 2 \equiv x^2 + 3x + 2 = 0 \equiv x = -1$ или $x = -2$.

Ответ. $-1; -2$.

б) $2^{3x-1} = 5 \equiv 2^{3x-1} = 2^{\log_2 5} \equiv 3x - 1 = \log_2 5 \equiv x = \frac{1}{3}(1 + \log_2 5)$.

Ответ. $\frac{1}{3}(1 + \log_2 5)$.

в) Поскольку число -1 не принадлежит области значений показательной функции $y = 2^x$, то уравнение $2^{x+2} = -1$ не имеет корней (рис. 173).

Ответ. Корней нет.

Пример 2. Решим неравенство:

а) $5^{2x+1} < 9$;

в) $0,2^{2x+3} \geq 2$;

б) $5^x > -2$;

г) $0,2^{3-x} \leq -2$.

а) $5^{2x+1} < 9 \equiv 5^{2x+1} < 5^{\log_5 9} \equiv 2x + 1 < \log_5 9 \equiv x < 0,5(\log_5 9 - 1)$.

Ответ. $(-\infty; 0,5(\log_5 9 - 1))$.

Здесь при переходе от неравенства $5^{2x+1} < 5^{\log_5 9}$ к неравенству $2x + 1 < \log_5 9$ мы сохранили знак неравенства, так как основание степени больше единицы.

б) Поскольку значениями показательной функции $y = 5^x$ являются положительные числа, то условие $5^x \geq -2$ истинно при любом значении показателя, т. е. каждое действительное число является решением этого неравенства.

Ответ. $(-\infty; +\infty)$.

в) $0,2^{2x+3} \geq 2 \equiv 0,2^{2x+3} \geq 0,2^{\log_{0,2} 2} \equiv x \leq 0,5(\log_{0,2} 2 - 3)$.

Ответ. $(-\infty; 0,5(\log_{0,2} 2 - 3)]$.

Здесь при переходе от неравенства $0,2^{2x+3} \geq 0,2^{\log_{0,2} 2}$ к неравенству $2x+3 \leq \log_{0,2} 2$ мы изменили знак неравенства на противоположный, так как основание степени меньше единицы.

г) Поскольку при любом значении показателя $3-x$ значением выражения $0,2^{3-x}$ является положительное число, то неравенство $0,2^{3-x} \leq -2$ не может быть истинным ни при каком значении переменной x , т. е. оно не имеет решений (рис. 174).

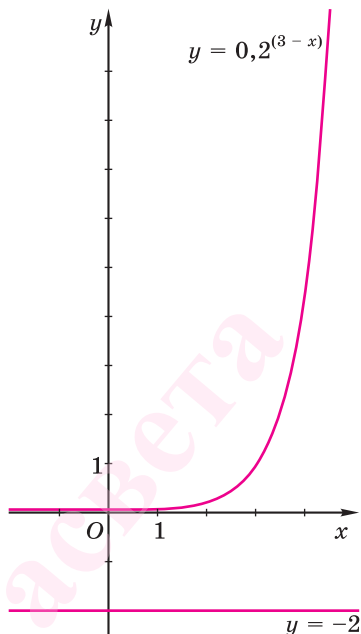


Рис. 174

Для сведения показательного уравнения или неравенства к простейшим применяют общие приемы решения уравнений и неравенств: *введение вспомогательной переменной, использование графических представлений, использование свойств функций, разложение на множители.*

Пример 3. Решим уравнение:

а) $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$; б) $4^x + 5^{2x+1} = 6 \cdot 10^x$.

а) Пусть $2^x = t$. Тогда уравнение $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$ запишется в виде $t^2 + 2t - 3 = 0$. Числа 1 и -3 — его корни. Вернувшись к исходной переменной, получим уравнения $2^x = 1$ и $2^x = -3$. Корнем первого является число 0, а второе уравнение корней не имеет.

Ответ. $x = 0$.

б) Перед введением вспомогательной переменной разделим обе части уравнения $4^x + 5^{2x+1} = 6 \cdot 10^x$ на выражение 5^{2x} , которое положительно при любых значениях переменной. Будем иметь:

$$\begin{aligned} 4^x + 5^{2x+1} &= 6 \cdot 10^x \equiv (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x \cdot 5^x + 5 \cdot (5^x)^2 = 0 \equiv \\ &\equiv \left(\left(\frac{2}{5} \right)^x \right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^x + 5 = 0. \end{aligned}$$

Пусть $\left(\frac{2}{5} \right)^x = a$, тогда получим уравнение $a^2 - 6a + 5 = 0$, корнями которого являются числа 1 и 5. Значит, $\left(\frac{2}{5} \right)^x = 1$ или $\left(\frac{2}{5} \right)^x = 5$, откуда $x_1 = 0$ и $x_2 = \log_{0,4} 5$.

Ответ. $x_1 = 0$; $x_2 = \log_{0,4} 5$.

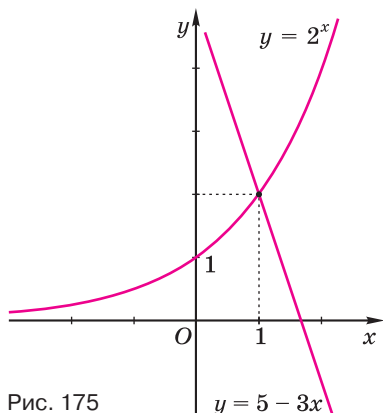


Рис. 175

Пример 4. Решим неравенство $2^x \leq 5 - 3x$.

Построим графики функций $y = 2^x$ и $y = 5 - 3x$ (рис. 175) и найдем, при каких значениях аргумента x точка графика первой функции лежит ниже точки графика второй. Видим, что графики пересекаются в точке $(1; 2)$. Если $x \leq 1$, то $2^x \leq 2^1$, а $5 - 3x \geq 5 - 3 \cdot 1$, так как функция $y = 2^x$ возрастает, а функция $y = 5 - 3x$ убывает. Значит,

при $x \leq 1$ истинно неравенство $2^x \leq 2 \leq 5 - 3x$. А если $x > 1$, то $2^x > 2^1$, $5 - 3x < 5 - 3 \cdot 1$ и потому истинно неравенство $2^x > 2 > 5 - 3x$, из которого следует, что ни одно число, большее 1, не является решением данного неравенства.

Ответ. $(-\infty; 1]$.

Пример 5. Решим неравенство $3^x + 4^x < 5^x$.

Функции, определяемые выражениями, записанными в левой и правой частях уравнения, возрастающие, но возрастают они с разной скоростью. Используем это. Разделим обе части неравенства на выражение 5^x , которое всегда положительно.

Получим равносильное неравенство $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < 1$. Функция $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ является убывающей как сумма убывающих

функций. А поскольку $f(2) = 1$, то решениями данного неравенства являются все числа, большие 2.

Ответ. $(2; +\infty)$.

Пример 6. Решим уравнение $x^2 \cdot 2^x + 1 = x^2 + 2^x$.

$$\begin{aligned} x^2 \cdot 2^x + 1 = x^2 + 2^x &\equiv x^2 \cdot (2^x - 1) - 2^x + 1 = 0 \equiv \\ &\equiv (2^x - 1)(x^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Остается решить уравнения $2^x - 1 = 0$ и $x^2 - 1 = 0$. Их корни 0, -1 и 1 исчерпывают все корни исходного уравнения.

Ответ. 0; -1; 1.

Пример 7. Решим систему уравнений $\begin{cases} 2^r \cdot 5^t = 40, \\ 5^r \cdot 2^t = 250. \end{cases}$

Перемножив уравнения системы, получим уравнение $2^{r+t} \times 5^{r+t} = 10\,000$, которое равносильно уравнению $10^{r+t} = 10^4$. Значит, $r + t = 4$.

Разделив первое уравнение системы на второе, придем к уравнению $2^{r-t} \cdot 5^{t-r} = \frac{4}{25}$, которое равносильно уравнению $\left(\frac{2}{5}\right)^{r-t} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$. Потому $r-t=2$.

Таким образом, данная система равносильна системе $\begin{cases} r+t=4, \\ r-t=2, \end{cases}$ которая имеет решением пару (3; 1).

Ответ. (3; 1).

Пример 8. Решим систему $\begin{cases} 12^{2m-3} \geq 2\sqrt{3}, \\ \left(\frac{7}{9}\right)^{2m^2-3m} - \left(\frac{9}{7}\right)^{2-m^2} = 0. \end{cases}$

Решим уравнение системы:

$$\begin{aligned} \left(\frac{7}{9}\right)^{2m^2-3m} - \left(\frac{9}{7}\right)^{2-m^2} = 0 &\equiv \left(\frac{7}{9}\right)^{2m^2-3m} = \left(\frac{7}{9}\right)^{m^2-2} \equiv 2m^2-3m = m^2-2 \equiv \\ &\equiv m^2-3m+2=0 \equiv m=1 \text{ или } m=2. \end{aligned}$$

Из найденных чисел неравенству удовлетворяет только число 2.

Ответ. $m=2$.

Пример 9. Решим уравнение $121^x - 2 \cdot 11^x = c$, где c — некоторое число.

Данное уравнение равносильно уравнению $11^{2x} - 2 \cdot 11^x = c$. Оно заменой $11^x = y$ сводится к квадратному уравнению $y^2 - 2y - c = 0$, решение которого зависит от дискриминанта $4(1+c)$.

Пусть $1+c < 0$, т. е. $c < -1$. Тогда квадратное уравнение не имеет корней, а потому не имеет корней и исходное уравнение.

Пусть $1+c = 0$, т. е. $c = -1$. Тогда квадратное уравнение имеет один корень $y = 1$. Учитывая замену $11^x = y$, получим уравнение $11^x = 1$, корнем которого является число $x = 0$.

Пусть $1+c > 0$, т. е. $c > -1$. Тогда квадратное уравнение имеет два корня: $y = 1 - \sqrt{1+c}$ и $y = 1 + \sqrt{1+c}$. Возвращение к исходной переменной приводит к уравнениям: $11^x = 1 + \sqrt{1+c}$ и $11^x = 1 - \sqrt{1+c}$. Корнем первого уравнения является число $x = \log_{11}(1 + \sqrt{1+c})$. Второе уравнение имеет корнем число $x = \log_{11}(1 - \sqrt{1+c})$, но при условии, что $1 - \sqrt{1+c} > 0$, т. е. при $c < 0$.

Ответ. Если $c < -1$, то уравнение не имеет корней;

если $c = -1$, то $x = 0$;

если $-1 < c < 0$, то $x_1 = \log_{11}(1 + \sqrt{1+c})$

и $x_2 = \log_{11}(1 - \sqrt{1+c})$;

если $c \geq 0$, то $x = \log_{11}(1 + \sqrt{1+c})$.

- ❓ 1. Какие утверждения $P(x)$ и $Q(x)$ с переменной x называются равносильными?
2. Когда говорят, что из утверждения $P(x)$ следует утверждение $Q(x)$?
3. Что означает равносильность уравнений $f(x) = g(x)$ и $f_1(x) = g_1(x)$?
4. Что означает утверждение *уравнение $f_1(x) = g_1(x)$ следует из уравнения $f(x) = g(x)$* ?
5. Что означает равносильность двух неравенств?
6. Что означает следование одного неравенства из другого?
7. Как равенство или неравенство степеней с определенным основанием связано с отношением между их показателями?
8. Какие приемы используют при решении показательных уравнений и неравенств?

683. Решите уравнение:

- а) $4^{x-1} = 1$; д) $0,5^{\frac{1}{s}} = 4^{\frac{1}{s+1}}$;
- б) $2^{2z} = 2^{4\sqrt{3}}$; е) $2^{q^2-7q+10} = 1$;
- в) $2 \cdot 4^e = 64$; ж) $2^{3v+2} - 2^{3v-2} = 30$;
- г) $2^{\frac{a-1}{a-2}} = 4$; з) $2^{t+1} + 2^{t-1} + 2^t = 28$.

684. Решите неравенство:

- а) $3^{p+\frac{1}{2}} \cdot 3^{p-2} > 1$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^t \leq \frac{1}{81}$;
- б) $3 \cdot 9^r < 81$; е) $3^{2z-1} + 3^{2z} > 108$;
- в) $27^h \leq \frac{1}{3}$; ж) $3^{x^2+x-12} < 1$;
- г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} \geq 9$; з) $3^{a-1} - 3^a + 3^{a+1} > 63$.

685. Решите уравнение:

- а) $400^j = \frac{1}{20}$; г) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-d^2-2d+3} = 1$;
- б) $100^{u^2-1} = 10^{1-5u}$; д) $\left(\frac{1}{5}\right)^h = 25^{-2}$;
- в) $0,3^{3y-2} = 3\frac{1}{3}$; е) $5,1^{\frac{1}{2}(x-3)} = 5,1\sqrt{5,1}$.

686. Решите неравенство:

- а) $0,6^x \cdot 0,6^3 \leq \frac{0,6^{2x}}{0,6^5}$; г) $0,5^{u+7} \cdot 0,5^{1-2u} \geq 2$; ж) $5^y \geq 8^y$;
б) $6^{3y} \cdot \frac{1}{6} < 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2y}$; д) $10^m > \frac{1}{\sqrt[4]{10000}}$; з) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^x$;
в) $10^k < \sqrt[5]{10000}$; е) $225^{2g^2-24} \geq 15$; и) $4^e \leq 3^{\frac{e}{3}}$.

687. Решите уравнение:

- а) $2^{|x-2|} = 2^{|x+4|}$; в) $2,5^{|5-k|} = 2,5^{|k-1|}$;
б) $3^{|y+1|} = 3^{2-|y|}$; г) $5^{|u|} = 5^{|2-u|-1}$.

688. Найдите область определения функции:

- а) $y = \sqrt{25^x - 5^x}$; в) $y = \sqrt{7\frac{1}{9} - \left(2\frac{2}{3}\right)^x}$; д) $y = \sqrt{\frac{1}{4 - 2^{-x^2+3x}}}$;
б) $y = \sqrt{4^x - 1}$; г) $y = \sqrt{\sqrt{5} - 5^{x+1}}$; е) $y = \sqrt{7^{x+2} - 5^{x+2}}$.

689. Решите уравнение:

- а) $7^x - 7^{x-1} = 6$; в) $3^{2k-1} + 3^{2k-2} - 3^{2k-4} = 315$;
б) $5^{3y} + 3 \cdot 5^{3y-2} = 140$; г) $2^{g+1} + 3 \cdot 2^{g-1} - 5 \cdot 2^g + 6 = 0$.

690. Определите, при каких значениях переменной x сумма чисел 2^{x-1} , 2^{x-4} и 2^{x-2} равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии $6,5$; $3,25$; $1,625$;

691. Решите уравнение:

- а) $3^{v+3} + 3^v = 7^{v+1} + 5 \cdot 7^v$;
б) $3^{s+4} + 3 \cdot 5^{s+3} = 5^{s+4} + 3^{s+3}$;
в) $2^{8-d} + 7^{3-d} = 7^{4-d} + 2^{3-d} \cdot 11$;
г) $2^{n+1} + 2^{n-1} - 3^{n-1} = 3^{n-2} - 2^{n-3} + 2 \cdot 3^{n-3}$.

692. Решите неравенство:

- а) $2^{g-1} + 2^{g+3} > 17$; в) $2^{2d-1} + 2^{2d-2} + 2^{2d-3} \geq 448$;
б) $3^{e+2} + 3^{e-1} < 28$; г) $5^{3h+1} - 5^{3h-3} \leq 624$.

693. Решите уравнение:

- а) $9^r - 4 \cdot 3^r + 3 = 0$; в) $16^u - 17 \cdot 4^u + 16 = 0$;
б) $25^t - 6 \cdot 5^t + 5 = 0$; г) $64^p - 8^p - 56 = 0$.

694. Решите неравенство:

- а) $8 \cdot 4^g - 6 \cdot 2^g + 1 < 0$; г) $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x - 6 \leq 0$;
б) $13^{2u+1} - 13^u - 12 > 0$; д) $3^{2h+1} - 10 \cdot 3^h + 3 > 0$;
в) $2^{3m} + 8 \cdot 2^m - 6 \cdot 2^{2m} \geq 0$; е) $5^{3r+1} + 34 \cdot 5^{2r} - 7 \cdot 5^r < 0$.

695. На промежутке $[-3; 3]$ найдите целые решения неравенства:

- а) $9^x - 3^x - 6 > 0$; в) $4^r - 2^r < 12$;
б) $5^{2y+1} + 4 \cdot 5^y - 1 > 0$; г) $3 \cdot 9^g + 11 \cdot 3^g < 4$.

696. Решите неравенство:

- а) $11^{\sqrt{q+6}} > 11^q$; г) $\frac{4^k}{4^k - 3^k} < 4$;
б) $0,3^{\sqrt{30-a}} > 0,3^a$; д) $25 \cdot 0,04^{2n} > 0,2^{n(3-n)}$;
в) $0,4^t - 2,5^{t+1} > 1,5$; е) $\left(\frac{1}{4}\right)^g - 32 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{g^2-1} < 0$.

697. Решите уравнение:

- а) $4 \cdot 9^d - 13 \cdot 6^d + 9 \cdot 4^d = 0$; в) $16 \cdot 9^m - 25 \cdot 12^m + 9 \cdot 16^m = 0$;
б) $2 \cdot 4^v - 3 \cdot 10^v - 5 \cdot 25^v = 0$; г) $4 \cdot 9^b + 12^b - 3 \cdot 16^b = 0$.

698. Решите неравенство:

- а) $6^c - 2 \cdot 4^c \leq 9^c$; в) $5 \cdot 4^t - 7 \cdot 10^t + 2 \cdot 25^t > 0$;
б) $5 \cdot 25^b + 2 \cdot 15^b \leq 3 \cdot 9^b$; г) $4\left(\frac{1}{9}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x \geq 5 \cdot 4^x$.

699. Разложением на множители решите уравнение:

- а) $x^2 \cdot 2^{x-2} + 3 \cdot 2^{x-3} - 2x^2 \cdot 3^{3-x} - 3^{4-x} = 0$;
б) $50b \cdot 0,1^{2b} + 3 \cdot 10^{b^2} = 5b \cdot 10^{b^2} + 30 \cdot 0,1^{2b}$;
в) $x \cdot 3^{2x+1} + 2^{x+1} = 3x \cdot 2^x + 2 \cdot 9^x$;
г) $2 \cdot 192^{0,5x} + 9 = \sqrt{3^x} + 18 \cdot 8^x$.

700. Разложением на множители решите неравенство:

- а) $2 \cdot 25^x - 10^x > 4^x$; в) $\sqrt{t-3} \cdot 2^{|t|} + 1 \leq \sqrt{t-3} + 2^{|t|}$;
б) $x^2 \cdot 2^x + 2 \leq 2^{x+1} + x^2$; г) $x^{0,5} \cdot 2^x - 8 \geq 4\sqrt{x} - 2^{x+1}$.

701. Докажите, что уравнение имеет только один корень $t = 1$:

- а) $4^t + 25^t = 29$; б) $7^t + 18^t = 25$.

702. Решите графически уравнение:

- а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^u = u - \frac{1}{2}$; д) $2^k = 3 - 2k - k^2$;
б) $2^x = -x - \frac{7}{4}$; г) $3^t = 11 - t$; е) $\left(\frac{1}{3}\right)^v = -\frac{3}{v}$.

703. Решите графически неравенство:

- а) $\left(\frac{1}{3}\right)^y \geq y + 1$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^p < p - \frac{1}{2}$; д) $3^{-d} \geq \sqrt{d+1}$;
 б) $2^q \leq 9 - \frac{1}{3}q$; г) $3^r > -\frac{2}{3}r - \frac{1}{3}$; е) $\left(\frac{1}{2}\right)^s \geq s^3 - \frac{1}{2}$.

704. Решите систему уравнений:

- а) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 5^{x+y} = 25; \end{cases}$ в) $\begin{cases} a + s = 1, \\ 2^{a-s} = 8; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 4^z \cdot 2^u = 32, \\ 3^{8z+1} = 3^{3u}; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} t - p = 2, \\ 3^{t^2+p} = \frac{1}{9}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} d + 2b = 3, \\ 3^{d-b} = 81; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3^{3r-2q} = 81, \\ 3^{6r} \cdot 3^q = 27. \end{cases}$

705. Решите систему уравнений:

- а) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6, \\ 2^x - 2^y = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5^x - 5^y = 100, \\ 5^{x-1} + 5^{y-1} = 30; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 16^y - 16^x = 60, \\ 16^{x+y} = 256; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} 3^x + 5^y = 8, \\ 3^x - 5^y = -2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2^x - 9 \cdot 3^y = 7, \\ 2^x \cdot 3^y = \frac{8}{9}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3^x + 2^{x+y+1} = 5, \\ 3^{x+1} - 2^{x+y} = 1. \end{cases}$

706. Решите систему условий:

- а) $\begin{cases} 5^{t+1} \cdot 3^u = 75, \\ 3^t \cdot 5^{u-1} = 3; \end{cases}$ д) $\begin{cases} (5^a)^b = 5^{21}, \\ 5^a \cdot 5^b = 5^{10}, \\ 3^a > 3^b; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} 3^r \cdot 2^s = 4, \\ 3^s \cdot 2^r = 9; \end{cases}$ е) $\begin{cases} (0,2^y)^x = 0,008, \\ (0,4)^y = 0,4^{3,5-x}, \\ 2^x \cdot 0,5^y < 1; \end{cases}$
 в) $\begin{cases} 5^{2p+1} > 625, \\ 11^{6p^2-10p} = 11^{9p-15}; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 3^{t-1} \leq \sqrt{3}, \\ (0,2)^{3l^2-2} = (0,2)^{2l^2+l+2}; \end{cases}$
 г) $\begin{cases} 0,3^{10q^2-47q} = 0,3^{-10q-7}, \\ 3,7^{q^2} \geq 3,7^4; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 3^{mn} = 3^{10}, \\ 4^m = 4^{7-n}, \\ 2^m < 2^n. \end{cases}$

707. Учитывая, что a — определенное число, решите уравнение или неравенство:

- а) $144^{|y|} - 2 \cdot 12^{|y|} + a = 0$; в) $4^t - 2^{(t+1)}a - 2^t + a(a+1) = 0$;
 б) $4^z - 2a(a+1) \cdot 2^{z-1} + a^3 = 0$; г) $\frac{a^x}{a^x-1} > \frac{1+a^{-x}}{1-2a^{-x}}.$

708. Сравните с единицей число:

- а) $\log_5 3$; в) $\log_2 7$; д) $\lg 0,17$;
б) $\lg 6$; г) $\log_{0,6} 0,5$; е) $\log_{0,5} 0,8$.

709. Найдите целую часть числа:

- а) $\log_2 5$; в) $\log_3 76$; д) $\lg 0,17$;
б) $\lg 64$; г) $\log_{0,6} 0,18$; е) $\log_{0,5} 0,98$.

710. Сравните числа:

- а) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ и $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; в) $\log_3 75$ и $\log_{0,6} 0,23$;
б) $2^{2\log_2 5 + \log_1 9}$ и $\sqrt{8}$; г) $\log_{0,5} 0,98$ и $\lg 0,17$.

711. Решите уравнение:

- а) $\sqrt{k-2}(k^2-k)=0$; г) $\sqrt{2y+1}(y^2-1)=0$;
б) $\sqrt{2+m}(m^2+3m)=0$; д) $\sqrt{1-b}(b^2-4b)=0$;
в) $\sqrt{n-1}(n^2-4)=0$; е) $\sqrt{2+q}(9-q^2)=0$.

712. Решите уравнение:

- а) $\sqrt{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x}} = \frac{2}{\sqrt{1-x}}$; г) $\sqrt{\frac{1}{r-2} - \frac{3}{2r}} = \frac{1}{\sqrt{2r}}$;
б) $\sqrt{2 - \frac{z}{z+1}} = \frac{4}{\sqrt{z+1}}$; д) $\sqrt{\frac{2}{y+3} - \frac{1}{y+1}} = \sqrt{\frac{3}{y+3}}$;
в) $\sqrt{\frac{2q}{q^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{q+1}}$; е) $\sqrt{\frac{31-k}{9-k^2}} = \frac{3}{\sqrt{3-k}}$.

713. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{3a-2} > 1$; г) $\frac{\sqrt{7-5v-2v^2}}{v+3} > 0$;
б) $\sqrt{\frac{b+3}{4-b}} \geq 2$; д) $\sqrt{(p+2)(p-5)} < 8-p$;
в) $\sqrt{\frac{2c-1}{3c-2}} \leq 3$; е) $\sqrt{(m-3)(m+1)} > 3(m+1)$.

714. Решите неравенство:

а) $\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2;$

г) $\frac{\sqrt{n^2-16}}{\sqrt{n-3}} + \sqrt{n-3} < \frac{5}{\sqrt{n-3}};$

б) $(y-3)\sqrt{y^2-4} \leq y^2-9;$

д) $\sqrt{a^2+3a+4} + \sqrt{a+1} > 1,4;$

в) $\sqrt{4+z} + \sqrt[4]{16-z} > 2;$

е) $\sqrt{b^2+3b+4} - \sqrt{b^2-b+1} < 1.$

715. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a и составляет с основанием пирамиды угол в 60° . Найдите площадь сечения, проведенного через сторону основания перпендикулярно противоположащему боковому ребру.

716. Треугольник ABC , у которого стороны AB и AC равны 13 см каждая, а сторона BC равна 10 см, является основанием пирамиды $DABC$. Ее ребро AD перпендикулярно плоскости основания и равно 9 см. Найдите полную поверхность пирамиды и ее объем.

717. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , а двугранный угол при основании — α . Найдите объем конуса:

а) вписанного в пирамиду;

б) описанного около пирамиды.

718. Диагонали осевого сечения усеченного конуса перпендикулярны, одно из оснований осевого сечения равно 40 см, а его площадь — 36 дм^2 . Найдите боковую и полную поверхности усеченного конуса.

* * *

719. В равнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла при основании AC . Точки M , N и K выбраны на прямой AC так, что $\angle AMB = \angle AND = \angle ADK = 90^\circ$. Найдите MN , учитывая, что $AK = k$.

720. Докажите, что $[2a + 2b] \geq [a + b] + [a] + [b]$. Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x .

721. Доля юношей среди учеников классов А и Б составляет $\frac{2}{5}$, а среди учеников классов Б и В — $\frac{3}{7}$. Какой может быть доля юношей среди учеников всех трех классов?

722. Докажите, что если число $2^n + 1$ является простым, то показатель n есть степень двойки.

15. Логарифмические уравнения, неравенства и их системы

Рассмотрим *логарифмические уравнения*, т. е. уравнения, в которых переменная содержится под знаком логарифма.

Теорема 11. *Логарифмы при одном и том же положительном и не равном единице основании равны тогда и только тогда, когда положительны и равны подлогарифмические выражения:*

$$\text{если } a > 0 \text{ и } a \neq 1, \text{ то } \log_a f(x) = \log_a g(x) \equiv \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$. Из равенства $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ следует, что $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$. Кроме того, $f(x) = a^{\log_a f(x)} = a^{\log_a g(x)} = g(x)$. Получили, что из равенства

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \text{ следует система } \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

А если истинна последняя система, то для любого положительного и не равного единице числа a существуют и равны значения выражений $\log_a f(x)$ и $\log_a g(x)$. Это озна-

$$\text{чает, что из системы условий } \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ следует равенство } \log_a f(x) = \log_a g(x).$$

Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\text{системы } \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \text{ и } \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ равносильны. Действи-}$$

тельно, последняя система является следствием предыдущей, и, в свою очередь, неравенство $f(x) > 0$ (или $g(x) > 0$) следует из равенства $f(x) = g(x)$ и неравенства $g(x) > 0$ (соответственно $f(x) > 0$).

В соответствии с доказанной теоремой при решении уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ можно решить уравнение $f(x) = g(x)$ и из полученных корней выбрать те, которые удовлетворяют какому-либо из неравенств $f(x) > 0$ или $g(x) > 0$.

Пример 1. Решим уравнение

$$\begin{aligned} \log_7 (5 + 3a - a^2) &= \log_7 (2a - 7). \\ \log_7 (5 + 3a - a^2) &= \log_7 (2a - 7) \equiv \begin{cases} 5 + 3a - a^2 = 2a - 7, \\ 2a - 7 > 0 \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} a = -3 \text{ или } a = 4, \\ a > 3,5 \end{cases} \equiv a = 4. \end{aligned}$$

Здесь мы для проверки выбрали более простое неравенство $2a - 7 > 0$.

Ответ. $a = 4$.

Теорема 12. Если $a > 1$, то $\log_a f(x) < \log_a g(x) \equiv 0 < f(x) < g(x)$, а если $0 < a < 1$, то $\log_a f(x) < \log_a g(x) \equiv 0 < g(x) < f(x)$.

Доказательство. Пусть $a > 1$. В этом случае функция $y = \log_a x$ возрастает. Потому из неравенства $0 < f(x) < g(x)$ следует, что существуют значения выражений $\log_a f(x)$ и $\log_a g(x)$ и $\log_a f(x) < \log_a g(x)$. Из возрастания показательной функции $y = a^x$ получаем, что из неравенства $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ следует, что $f(x) = a^{\log_a f(x)} < a^{\log_a g(x)} = g(x)$. Кроме того, истинно неравенство $f(x) > 0$. Значит, из условия $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ следует условие $0 < f(x) < g(x)$. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Если $0 < a < 1$, то функции $y = \log_a x$ и $y = a^x$ обе являются убывающими. В этом случае из неравенства $0 < g(x) < f(x)$ получаем, что значения выражений $\log_a f(x)$ и $\log_a g(x)$ существуют и $\log_a f(x) < \log_a g(x)$. В свою очередь, из неравенства $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ следует, что $g(x) < f(x)$ и $g(x) > 0$. Этим обоснована равносильность условий $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ и $0 < g(x) < f(x)$.

Пример 2. Решим неравенство

$$\log_9 (2r^2 - 15r + 25) \geq \log_9 (13 - 6r) + \frac{1}{2}.$$

Преобразуем правую часть неравенства:

$$\log_9 (13 - 6r) + \frac{1}{2} = \log_9 (13 - 6r) + \log_9 3 = \log_9 (39 - 18r).$$

С учетом теорем 11 и 12 данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2r^2 - 15r + 25 > 0, \\ 39 - 18r > 0, \\ 2r^2 - 15r + 25 \geq 39 - 18r. \end{cases}$$

Опустив первое неравенство, которое является следствием третьего и второго неравенств, и упростив третье неравенство, получим систему

$$\begin{cases} 39 - 18r > 0, \\ 2r^2 + 3r - 14 \geq 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} r < 2\frac{1}{6}, \\ r \leq -3\frac{1}{2} \text{ или } r \geq 2. \end{cases}$$

Изобразим полученные решения на координатной прямой (рис. 176) и запишем ответ.



Рис. 176

Ответ. $(-\infty; -3\frac{1}{2}] \cup [2; 2\frac{1}{6}).$

При решении логарифмических неравенств и уравнений важно обеспечивать равносильность проводимых преобразований.

Пример 3. Решим неравенство $\log_3 c + \log_3 (c + 2) \leq 1$.

Выражения $\log_3 c$ и $\log_3 (c + 2)$ имеют значения только при положительных значениях c . С учетом этого имеем:

$$\begin{aligned} \log_3 c + \log_3 (c + 2) \leq 1 &\equiv \begin{cases} \log_3 (c(c + 2)) \leq 1, \\ c + 2 > 0, \\ c > 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \log_3 (c(c + 2)) \leq \log_3 3, \\ c > 0 \end{cases} \\ &\equiv \begin{cases} c^2 + 2c - 3 \leq 0, \\ c > 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} -3 \leq c \leq 1, \\ c > 0 \end{cases} \equiv 0 < c \leq 1. \end{aligned}$$

Ответ. $(0; 1].$

Пример 4. Решим неравенство $\frac{\log_2 x \cdot \log_4 2x}{\log_8 4x} \geq \log_{16} 8x$.

Учтем, что $\log_4 2x = \frac{\log_2 2x}{\log_2 4} = \frac{1}{2}(1 + \log_2 x)$, $\log_8 4x = \frac{\log_2 4x}{\log_2 8} = \frac{1}{3}(2 + \log_2 x)$, $\log_{16} 8x = \frac{\log_2 8x}{\log_2 16} = \frac{1}{4}(3 + \log_2 x)$. Это позволяет ввести замену $\log_2 x = t$ и привести исходное неравенство к виду $\frac{t \cdot \frac{1}{2}(1+t)}{\frac{1}{3}(2+t)} \geq \frac{1}{4}(3+t)$. Решим полученное дробно-рациональное неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{t \cdot \frac{1}{2}(1+t)}{\frac{1}{3}(2+t)} \geq \frac{1}{4}(3+t) &\equiv \frac{6t(1+t) - (3+t)(2+t)}{2+t} \geq 0 \equiv \frac{5t^2 + t - 6}{2+t} \geq 0 \equiv \\ &\equiv \frac{5\left(t + \frac{6}{5}\right)(t-1)}{2+t} \geq 0 \equiv \begin{cases} t \geq 1, \\ -2 < t \leq -\frac{6}{5}. \end{cases} \end{aligned}$$

Если $-2 < t \leq -\frac{6}{5}$, то:

$$-2 < \log_2 x \leq -1,2 \equiv \log_2 2^{-2} < \log_2 x \leq \log_2 2^{-1,2} \equiv 2^{-2} < x \leq 2^{-1,2}.$$

Если $t \geq 1$, то:

$$\log_2 x \geq 1 \equiv \log_2 x \geq \log_2 2 \equiv x \geq 2.$$

Таким образом, решениями исходного неравенства являются все числа из промежутков $(2^{-2}; 2^{-1,2}]$ и $[2; +\infty)$.

Ответ. $(2^{-2}; 2^{-1,2}] \cup [2; +\infty)$.

Разобранные примеры демонстрируют два пути решения логарифмических уравнений и неравенств. На первом пути используется потенцирование для сведения исходного условия к отношению между логарифмами некоторых выражений. Так решался пример 3. На втором пути, как при решении примера 4, используется новая переменная для сведения исходного условия к другому, более простому.

Пример 5. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3(n-m) = 1, \\ \log_3 m - \log_3 2 - 3 + \log_3 n = 0. \end{cases}$$

Решение системы должно удовлетворять условиям $m > 0$, $n > 0$ и $n > m$. При этих условиях первое уравнение дает $n-m=3$, а второе — $\log_3(mn) = \log_3 54$, или $mn=54$.

Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} n > 0, \\ m > 0, \\ n > m, \\ n - m = 3, \\ nm = 54, \end{cases} \quad \text{которая равносильна системе} \quad \begin{cases} m > 0, \\ n - m = 3, \\ nm = 54. \end{cases} \quad \text{Решение}$$

нием этой системы является пара чисел $n = 9$, $m = 6$.

Ответ. $(m; n) = (6; 9)$.

Пример 6. Решим неравенство $\log_s (s - q) \leq 2$, где q — определенное число.

Значения переменных должны удовлетворять системе условий

$$\begin{cases} s > 0, \\ s \neq 1, \\ s - q > 0, \end{cases}$$

которой на координатной плоскости sOq соответствует множество D точек, лежащих ниже прямой $q = s$, правее оси ординат q и не принадлежащих прямой $s = 1$ (рис. 177).

Если $s > q$ и $0 < s < 1$, то исходное неравенство равносильно неравенству $s - q \geq s^2$, а если $s > 1$, то неравенству $s - q \leq s^2$. Прямая $s = 1$ и парабола $q = -s^2 + s$ разделяют область D на четыре части D_1, D_2, D_3, D_4 (рис. 178), в которых знаки каждого из выражений $s - 1$ и $q + s^2 - s$ постоянны.

Если $0 < s < 1$, то должно выполняться неравенство $q \leq -s^2 + s$, т. е. должны быть выбраны те точки области D ,

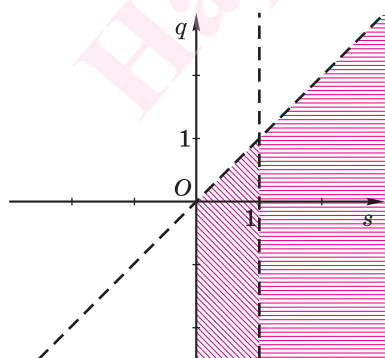


Рис. 177

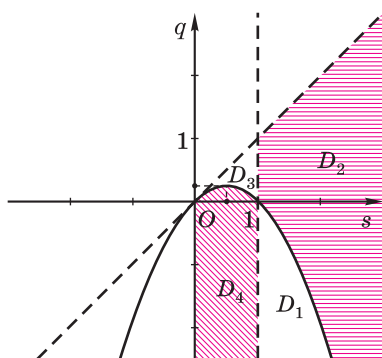


Рис. 178

которые расположены на параболе $q = -s^2 + s$ или ниже ее, т. е. точки фигуры D_4 .

Если $s > 1$, то должно выполняться неравенство $q \geq -s^2 + s$, т. е. должны быть выбраны точки области определения, расположенные на параболе $q = -s^2 + s$ или выше ее, т. е. точки фигуры D_2 .

Чтобы записать ответ, нужно для каждого значения q_0 переменной q найти те точки фигур D_2 и D_4 , ординаты которых равны q_0 , и установить, какими могут быть их абсциссы. Например, для значения q , показанного на рисунке 179, ответ составляют абсциссы внутренних точек отрезка KL и луча MN .

Для выписывания ответа найдем абсциссы точек пересечения прямой $q = q_0$ и параболы $q = -s^2 + s$, которые являются корнями уравнения $q_0 = -s^2 + s$. Получим:

$$s_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4q_0}}{2}, \quad s_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4q_0}}{2}.$$

Видно, что прямая $q = q_0$ пересекает параболу $q = -s^2 + s$, если $q_0 \leq \frac{1}{4}$.

Ответ. Если $q < 0$, то $0 < s < 1$ или $s \geq \frac{1 + \sqrt{1 - 4q_0}}{2}$;

если $q = 0$, то $0 < s < 1$ или $s > 1$;

если $0 < q \leq \frac{1}{4}$, то $\frac{1 - \sqrt{1 - 4q_0}}{2} \leq s \leq \frac{1 + \sqrt{1 - 4q_0}}{2}$ или $s > 1$;

если $\frac{1}{4} < q \leq 1$, то $s > 1$;

если $q > 1$, то $s > q$.

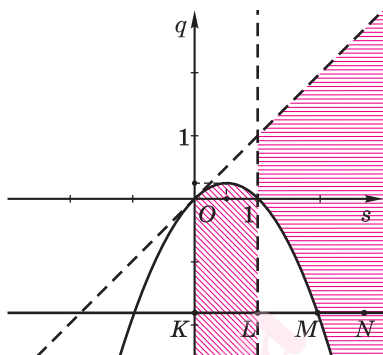


Рис. 179

- ?
1. Какие утверждения $P(x)$ и $Q(x)$ с переменной x называются равносильными?
 2. Когда говорят, что из утверждения $P(x)$ следует утверждение $Q(x)$?
 3. Что означает равносильность уравнений $f(x) = g(x)$ и $f_1(x) = g_1(x)$?
 4. Что означает утверждение Уравнение $f_1(x) = g_1(x)$ следует из уравнения $f(x) = g(x)$?
 5. Что означает равносильность двух неравенств?
 6. Что означает следование одного неравенства из другого?

7. Какие свойства логарифмической функции используются при решении логарифмических уравнений и неравенств?

8. Какие общие приемы используются при решении логарифмических уравнений и неравенств?

723. Без решения определите, равносильны ли уравнения:

а) $2^{3x+1} = 2^{-3}$ и $3x + 1 = -3$; б) $\log_3(x - 1) = 2$ и $x - 1 = 9$.

724. Установите, равносильны ли уравнения:

а) $\lg x^2 = 0$ и $2\lg x = 0$;

б) $\lg u^3 = 0$ и $3\lg u = 0$;

в) $5\lg(-t) = \lg t^4$ и $(-t)^5 = t^4$;

г) $\log_2(3x - 6) = \log_2(2 - x)$ и $\log_3(1 - y^2) = \log_3(y^2 - 4)$.

725. Запишите систему, которой равносильно уравнение:

а) $\lg(3x - 6) = \lg(4x - 10)$;

б) $\lg(z^2 - z - 12) = \lg(z^2 - 3z - 10)$.

726. Решите уравнение:

а) $\log_5 x^2 = 0$; в) $\log_3 x^3 = 0$; д) $\lg x^4 + \lg 4x = 2 + \lg x^3$;

б) $\log_4 x^2 = 3$; г) $\log_4 x^3 = 6$; е) $\lg x + \lg x^2 = \lg 9x$.

727. Найдите три последовательных члена геометрической прогрессии, учитывая, что их сумма равна 62, а сумма их десятичных логарифмов — 3.

728. Решите уравнение:

а) $\log_7(x - 1) \log_7 x = \log_7 x$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} x \log_{\frac{1}{3}}(3x - 2) = \log_{\frac{1}{3}}(3x - 2)$;

в) $\log_2(3x + 1) \log_3 x = 2\log_2(3x + 1)$;

г) $\log_{\sqrt{3}}(x - 2) \log_5 x = 2\log_3(x - 2)$;

д) $\log_4(x + 2)(x + 3) + \log_4 \frac{x-2}{x+3} = 2$;

е) $\log_2 \frac{x-1}{x+4} + \log_2(x - 1)(x + 4) = 2$.

729. Решите неравенство:

- а) $\log_3(x-7) < 3$; ж) $\lg u > \lg 7 + 1$;
б) $\log_8(6-3t) \geq 2$; з) $\lg r > 2 - \lg 5$;
в) $\log_3(v+1) \leq -2$; и) $\log_2(f-4) \geq 1$;
г) $\log_{\frac{1}{3}}(y-7) > -2$; к) $\log_{\frac{1}{7}}(3g-5) > \log_{\frac{1}{7}}(g+1)$;
д) $\log_{\frac{1}{5}}(4-3s) \geq -1$; л) $\log_{17}(f-3) + \log_{17}(f-5) \leq 1$;
е) $\log_{\frac{2}{3}}(2-5z) < -2$; м) $\log_{\frac{1}{3}}(h-2) + \log_{\frac{1}{3}}(12-h) > -2$.

730. Решите неравенство:

- а) $\log_2(x-5) + \log_2(x+2) > 3$;
б) $\log_3(x-2) + \log_3(x+6) \leq 2$;
в) $\lg(x+\sqrt{3}) + \lg(x-\sqrt{3}) < 0$;
г) $\lg(x-1) + \lg(x+1) < 0$;
д) $\lg(x-1) - \lg(2x-11) \geq \lg 2$;
е) $\lg(3x-1) - \lg(x+5) > \lg 5$.

731. Решите уравнение:

- а) $\log_3 x^2 - \log_3 \frac{x}{x+6} = 3$; г) $2^{\log_3 x^2} \cdot 5^{\log_3 x} = 400$;
б) $\log_2 \frac{x+4}{x} + \log_2 x^2 = 5$; д) $\frac{1}{4 + \lg x} + \frac{2}{2 - \lg x} = 1$;
в) $2^{3 \lg x} \cdot 5^{\lg x} = 1600$; е) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$.

732. Решите неравенство:

- а) $\log_{\frac{1}{3}} w - 4 > 0$; в) $|3 - \log_2 t| < 2$;
б) $\log_{\frac{2}{3}} w - 9 \geq 0$; г) $|3 \lg n - 1| < 2$.

733. Решите неравенство:

- а) $\log_2 x - 2 \log_x 2 > -1$; г) $\log_2 x + \log_x 2 \geq 2,5$;
б) $\log_3 x + 2 \log_x 3 \leq 3$; д) $\log_3 x - 6 \log_x 3 < 1$;
в) $\log_{x^2} 9 + \log_{\sqrt{x}} 4 \geq 2$; е) $\log_{x^2} 16 - \log_{\sqrt{x}} 7 \leq 2$.

734. Решите уравнение:

а) $\lg(6 \cdot 5^x - 25 \cdot 20^x) - \lg 25 = x$;

б) $\sqrt{\log_x 25 + 3} = \frac{1}{\log_5 x}$;

в) $\lg(2^x + x + 4) = x - x \lg 5$;

г) $\sqrt{2 \log_2^2 x + 3 \log_2 x - 5} = \log_2 2x$.

735. Найдите область определения функции:

а) $y = \lg(3x - 2)$;

д) $b = \log_6(2a^2 + 5a - 7)$;

б) $z = \log_2(5 - 15t)$;

е) $d = \sqrt{\lg c + \lg(c + 3)}$;

в) $u = \log_{\frac{1}{2}}(v^2 - 8)$;

ж) $f = \log_6 \log_6 \frac{3e+2}{1-e}$;

г) $r = \log_{\sqrt{2}}(9 - s^2)$;

з) $g = \sqrt{\lg(h+3) + \lg(h-3)}$.

736. Решите уравнение:

а) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$;

г) $\log_5 b \cdot \log_3 b = 9 \log_5 3$;

б) $\log_3 a + \log_{\sqrt{3}} a + \log_{\frac{1}{3}} a = 6$;

д) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{10}{7-z} = \log_{\frac{1}{2}} z$;

в) $\log_3 y \cdot \log_2 y = 4 \log_3 2$;

е) $\log_3(2 - c^2) - \log_3(-c) = 0$.

737. Решите уравнение:

а) $\log_{\sqrt{2}} q + 4 \log_4 q + \log_8 q = 13$;

б) $\log_{\frac{1}{x}} 5 + \log_{\frac{1}{x^2}} 12 + \frac{1}{2} \log_x 3 = 1$;

в) $\frac{1}{2} \log_r 7 - \log_{\frac{1}{\sqrt{r}}} 3 - \log_{r^2} 28 = 1$;

г) $\log_{0,5}(a+2) - \log_2(a-3) = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-4a-8)$;

д) $\log_2 b \cdot \log_2(b-3) + 1 = \log_2(b^2 - 3b)$;

е) $\log_5(x+1) \cdot \log_5(x-1) + \log_{0,2}(x^2 - 1) + 1 = 0$.

738. Решите уравнение:

$$а) \frac{1}{5 - 4\lg(r+1)} + \frac{5}{1 + 4\lg(r+1)} = 2;$$

$$д) \frac{\lg(35 - p^3)}{\lg(5 - p)} = 3;$$

$$б) \lg^2(100s) + \lg^2(10s) = 14\lg s + 15;$$

$$е) 4 - \lg m = 3\sqrt{\lg m};$$

$$в) \lg(v^2 - 8) \lg(2 - v) = \frac{\log_5(v^2 - 8)}{\log_5(2 - v)};$$

$$ж) \log_n 2 + \log_2 n = 2,5;$$

$$г) \log_2(u+1)^2 + \log_2 \sqrt{u^2 + 2u + 1} = 6;$$

$$з) \log_{\frac{1}{2}} 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8.$$

739. Определите, при каких значениях переменной истинно условие:

$$а) \log_2(2^y - 5) - \log_2(2^y - 2) = 2 - y;$$

$$б) \log_2(2^z + 1) + \log_2(2^{z+1} + 2) = 2;$$

$$в) \log_2(25^{l+3} - 1) = 2 + \log_2(5^{l+3} + 1);$$

$$г) \log_2(4^t + 4) = \log_2 2^t + \log_2(2^{t+1} - 3);$$

$$д) \log_2(9 - 2^w) = 3 - w;$$

$$е) \log_4(2 \cdot 4^{u-2} - 1) = 2u - 4;$$

$$ж) x \lg 5 - x \geq \lg(2^x + 1) - \lg 6;$$

$$з) 1 + \lg(2^{t-2} + 1) \geq \lg 2 + \lg(4^{t-2} + 9).$$

740. Решите неравенство:

$$а) \log_{\frac{1}{3}} \log_2 a^2 > 0;$$

$$е) \log_{0,2} l - \log_5(l - 2) < \log_{\frac{1}{5}} 3;$$

$$б) \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(b^2 - 1) < 1;$$

$$ж) \log_{0,1} t - \log_{0,1}(t - 1) > \log_{0,1} \frac{1}{2};$$

$$в) \log_{0,1} v - 3\log_{0,1} v > 4;$$

$$з) \log_3(2 - 3^{-i}) < i + 1 - \log_3 4;$$

$$г) \frac{1}{5 - \lg w} + \frac{1}{1 + \lg w} < 1;$$

$$и) \log_{z^2-3}(4z + 7) > 0;$$

$$д) \log_{0,2} y - 5\log_{0,2} y < -6;$$

$$к) \log_{\frac{c-1}{5c-6}}(\sqrt{6} - 2c) < 0.$$

741. Решите неравенство:

$$а) \log_2^2 a - \log_2 a \leq 6;$$

$$г) \log_{\frac{1}{2}} \cos 2m > 1;$$

$$б) \lg^2 b + 2\lg b > 3;$$

$$д) \log_{2a+3} a^2 \leq 1;$$

$$в) \log_2\left(\sin \frac{l}{2}\right) < -1;$$

$$е) \log_{c^2}(c + 2) \leq 1.$$

742. Решите уравнение:

- а) $\log_5 (m^2 - 12) - \log_5 (-m) = 0$;
б) $\log_{1-x} (3 - x) = \log_{3-x} (1 - x)$;
в) $3 + 2\log_{t+1} 3 = 2\log_3 (t + 1)$;
г) $\log_{3d+7} (5d + 3) = 2 - \log_{5d+3} (3d + 7)$;
д) $1 + 2\log_{x+2} 5 = \log_5 (x + 2)$;
е) $2 - \lg (3y + 1) = \log_{3y+1} 10$.

743. Решите неравенство:

- а) $4\log_4 j - 33\log_j 4 \leq 1$; г) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6^{l+1} - 36^l) \geq -2$;
б) $\log_i 3 \leq 4\left(1 + \log_{\frac{1}{3}} i\right)$; д) $\frac{1}{\log_a x - 1} + \frac{1}{\log_a x^2 + 1} < \frac{3}{2}$;
в) $\log_{\frac{1}{3}} (2^{k+2} - 4^k) \geq -2$; е) $\log_3 (y^2 + 7y - 5) > 1$.

744. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

- а) $\log_2 (x + y) < 1$; б) $\log_2 (y - x^2) < 2$.

745. Решите графическим способом уравнение:

- а) $\log_3 x = 5 - x$; в) $\log_3 x = \frac{3}{x}$; д) $\log_{0,5} t = 4 - t^2$;
б) $\log_{\frac{1}{3}} x = 3x$; г) $x \log_2 x = 1$; е) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2^x$.

746. Решите уравнение:

- а) $\lg^2 (x + 1) = \lg (x + 1) \lg (x - 1) + 2\lg^2 (x - 1)$;
б) $2\log_5 (4 - x) \cdot \log_{2x} (4 - x) = 3\log_5 (4 - x) - \log_5 2x$;
в) $u^{2\log_{36} (5u^2 - 2u - 3)} - u \log_{\frac{1}{6}} \sqrt{5u^2 - 2u - 3} = u^2 + u$;
г) $t^2 \log_2 \frac{3+t}{10} - t^2 \log_{\frac{1}{2}} (2 + 3t) = t^2 - 4 + 2 \log_{\sqrt{2}} \frac{3t^2 + 11t + 6}{10}$.

747. Решите неравенство:

- а) $\frac{1}{\log_2 c} \leq \frac{1}{\log_2 \sqrt{c+2}}$; в) $\frac{\sqrt{\log_{0,5}^2 f - 81} + 2}{\log_{0,5} f - 1} < 1$;
б) $\frac{1}{\log_{0,5} \sqrt{a+3}} \leq \frac{1}{\log_{0,5} (a+1)}$; г) $\frac{j+1}{\log_2 (1+2^j) - 1} \leq 1$.

748. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \lg x - \lg y = 2, \\ x - 10y = 900; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2, \\ x^2 y - 2y + 9 = 0; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{y} = 4, \\ xy = 2. \end{cases} \end{array}$$

749. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x + y = 7, \\ \lg x + \lg y = 1; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} \log_4(u + v) = 2, \\ \log_3 u + \log_3 v = 2 + \log_3 7; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} m + n = 34, \\ \log_2 m + \log_2 n = 6; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \log_4 a - \log_4 b = 0, \\ a^2 - 5b^2 + 4 = 0. \end{cases} \end{array}$$

750. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg(x + y)^2 - \lg x = 2 \lg 3; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 3^a \cdot 2^b = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(b - a) = 4; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} 10^{1 + \lg(t+z)} = 50, \\ \lg(t+z) + \lg(t-z) = 2 - \lg 5; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \lg r - \lg s = \lg 15 - 1, \\ 10^{\lg(3r+2s)} = 39. \end{cases} \end{array}$$

751. Решите уравнение:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } u^{\lg 9} + 9^{\lg u} = 6; & \text{в) } t^{\log_3 3t} = 9; & \text{д) } x^{3\lg^3 x - \frac{2}{3}\lg x} = 100\sqrt[3]{10}; \\ \text{б) } x^{\lg x} = \frac{100}{x}; & \text{г) } y^{\lg \sqrt{y}} = 100; & \text{е) } z^{1 + \lg z} = 0,001^{-\frac{2}{3}}. \end{array}$$

752. Найдите все значения переменной a , при которых уравнение $5\log_5 x + \log_a x - 4\log_{25} x = a$ имеет корни.

753. Найдите все решения неравенства

$$\log_a(x^2 - x - 2) > \log_a(x^2 + 2x + 3),$$

учитывая, что число $\sqrt{6}$ является одним из его решений.

754. Решите неравенство:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \log_a(x^2 + x + 2) < \log_a(2x^2 - 18), \text{ где } a \text{ — определенное число,} \\ \text{учитывая, что } x = -3,5 \text{ — одно из его решений;} \\ \text{б) } \log_c(z^2 - z - 2) > \log_c(-z^2 + 2z + 3), \text{ учитывая, что } c \text{ — определенное} \\ \text{число и неравенство истинно при } z = \frac{9}{4}. \end{array}$$

755. Определите, какие значения может принимать переменная a , учитывая, что все корни уравнения

$$(a-1)\log_3^2(x-2) + 2(a+1)\log_3(x-2) + a-3 = 0$$

меньше 3.

756. Определите, какие значения может принимать переменная b , учитывая, что:

а) каждое решение неравенства $0,4^{y^2+1} \geq 6,25^{b-3y}$ является решением неравенства $y^2 - 6y + 4 < b^2$;

б) каждое решение неравенства $\log_{0,5} y^2 \geq \log_{0,5} (y+2)$ является решением неравенства $49y^2 - 4b^2 \leq 0$;

в) неравенство $\log_{b(b+1)}(|x|+4) > 1$ истинно при любом значении переменной x ;

г) неравенство $\log_{b^2-\frac{2}{3}}((b^2-1)z^2+2z+2) > 1$ истинно при любом значении переменной z ;

д) неравенство $\log_{\frac{b}{b+1}}(t^2+2) > 1$ истинно для любого значения переменной t .

757. Решите систему
$$\begin{cases} \log_{x-2}(2x^2-4x+y+1) = 2, \\ x+y-3 = a-a^2, \end{cases}$$
 где a — определенное число.

758. Решите уравнение:

а) $\sqrt{y+1} = 11-y$; в) $2\sqrt{t+5} = t+2$;

б) $\sqrt{5s+1} = 1-s$; г) $\sqrt{7-u} = u-1$.

759. Решите уравнение:

а) $(x^2+4x)\sqrt{x+1} = 0$; в) $(16-q^2)\sqrt{q+3} = 0$;

б) $(r^2+r)\sqrt{r-1} = 0$; г) $(p^2-4p)\sqrt{1-p} = 0$.

760. Решите уравнение:

а) $\sqrt{|x-7|} = x-1$; г) $\sqrt{|z-10|} = z+2$;

б) $\sqrt{|c-5|} = c+1$; д) $\sqrt{|y-8|} = y-2$;

в) $\sqrt{|2a-32|} = a-4$; е) $\sqrt{|3t-9|} = t+3$.

761. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} \sqrt{t} - \sqrt{n} = 0,5\sqrt{tn}, \\ t + n = 5; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \sqrt{k+m} + \sqrt{k-m} = 6, \\ k + 2m = 37; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} \sqrt{v-f+4} - \sqrt{v+f} = 1, \\ 2v + f = 1,5; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} \sqrt{2g+n} - \sqrt{n-g} = 1, \\ g + n = 3. \end{cases}$$

762. Решите неравенство:

а) $\sqrt{2d+10} < 3d-5;$

б) $\sqrt{q^2 - q - 12} < q;$

в) $\sqrt{(n+4)(2n-1)} < 2(n+4);$

г) $\sqrt{9u-20} < u;$

д) $\frac{y-4}{\sqrt{y}+2} < y-8;$

е) $\frac{3}{x} + 1 < \sqrt{\frac{9}{x^2} - 3};$

ж) $\sqrt{17-4t} + \sqrt{t-5} \leq \sqrt{13t+1};$

з) $\sqrt{p+6} > \sqrt{p-1} + \sqrt{2p-5}.$

763. Докажите, что:

- а) скрещивающиеся ребра правильной треугольной пирамиды перпендикулярны друг другу;
- б) плоскость, проходящая через высоту правильной пирамиды и высоту ее боковой грани, перпендикулярна плоскости этой грани.

764. Есть правильная треугольная пирамида, боковое ребро которой наклонено к плоскости основания под углом в 60° . Через сторону основания, равную 12 см, под углом в 30° к плоскости основания проведена плоскость. Найдите площадь сечения.

765. Основанием пирамиды является ромб со стороной 25 см и меньшей диагональю 14 см, а высота пирамиды, равная 2,8 см, проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Найдите высоту боковой грани.

766. Стороны оснований треугольной усеченной пирамиды равны 12 дм и 6 дм, а ее высота — 1 дм. Найдите боковую поверхность и объем пирамиды.

767. Найдите объем пирамиды, учитывая, что:

- а) она правильная четырехугольная с боковым ребром b и двугранным углом при нем — α ;

б) ее основание — прямоугольник с площадью 1 м^2 , две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к нему под углами в 30° и 60° .

768. Определите, как расположены на поверхности конуса точки, равноудаленные от двух точек окружности его основания.

769. Есть конус, радиус основания которого равен r и образующая — $2r$. Сечение конуса плоскостью, проведенной через две образующие, в $\sqrt{3}$ раз меньше осевого сечения. Определите косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания.

* * *

770. Найдите все натуральные значения переменной n , при которых значение выражения $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ является простым числом.

771. Есть полуокружность с диаметром AB . На диаметре выбрана отличная от его середины O точка M , а на полуокружности — такие точки C и D , что $\angle AMC = \angle BMD$. Найдите CD , учитывая, что $CM - MD = l$ и $OM = k \cdot OA$.

772. Решите уравнение $8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$.

773. Четыре корня многочлена $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ образуют арифметическую прогрессию с разностью 1. Найдите расстояние между точками минимума функции $f(x)$.

16. Сфера

Сферой называется поверхность, полученная вращением окружности вокруг какого-либо ее диаметра (рис. 180). Центр этой окружности называется **центром сферы**.

Отрезок, соединяющий центр сферы с любой ее точкой, называется **радиусом сферы**, отрезок, соединяющий две точки сферы, — **хордой сферы**, а хорда, которой принадлежит центр сферы, — **диаметром сферы** (рис. 181).

Из определения сферы следует, что все ее точки равноудалены от центра сферы. Поэтому все радиусы сферы равны друг другу.

Теорема 1. *Сечение сферы плоскостью есть окружность, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость.*

Доказательство. Пусть сфера с центром O пересечена плоскостью α , и Q — основание перпендикуляра, опущенного из центра O на плоскость α (рис. 182).

Пусть X и Y — произвольные точки линии пересечения сферы с плоскостью α . Треугольники OQX и OQY оба прямоугольные, так как отрезок OQ перпендикулярен плоскости α , а значит, и отрезкам QX и QY , лежащим в этой плос-

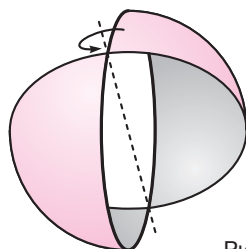


Рис. 180

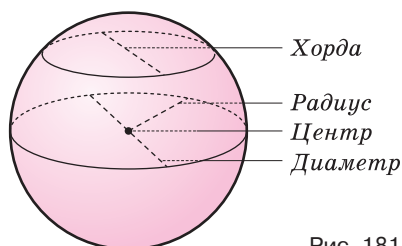


Рис. 181

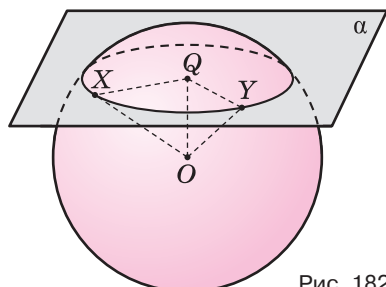


Рис. 182

кости. Отрезок OQ является общим катетом, а гипотенузы этих треугольников равны как радиусы сферы. Поэтому треугольники OQX и OQY равны друг другу, а значит, $QX = QY$. Получили, что любые две точки линии пересечения сферы плоскостью α равноудалены от основания Q перпендикуляра, опущенного из центра сферы на эту плоскость. Значит, эта линия является окружностью с центром Q .

Следствие. Радиус r сечения сферы плоскостью удовлетворяет условию $0 < r \leq R$, где R — радиус сферы.

Сечение имеет наибольший радиус R , если секущая плоскость проходит через центр сферы, это сечение называют *большой окружностью*, а ограниченный ею круг — *большим кругом*.

Плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку, называется **касательной плоскостью сферы**. Общая точка сферы и касательной плоскости называется *точкой касания*.

Прямая касательной плоскости сферы, проходящая через точку касания, имеет со сферой единственную общую точку. Такая прямая называется *касательной прямой сферы*.

Теорема 2. Касательная плоскость сферы перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Доказательство. Пусть плоскость α касается сферы с центром O в точке C (рис. 183). Пусть B — произвольная точка плоскости α , отличная от точки C . Через точки O, C, B проведем плоскость β , она по теореме 1 пересекает сферу по окружности. По отношению к этой окружности прямая BC является касательной, так как точка C — их единственная общая точка. По свойству касательной к окружности радиус OC перпендикулярен прямой BC . Таким образом, радиус OC перпендикулярен любой прямой BC , проведенной в плоскости α через ее точку C . Значит, радиус OC перпендикулярен плоскости α .

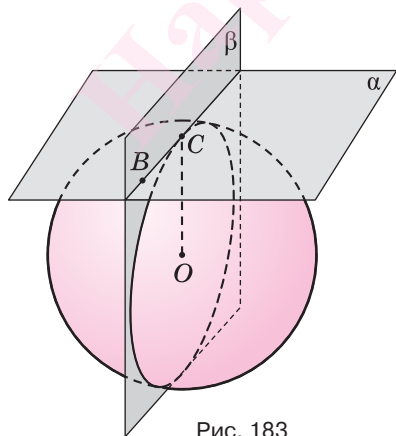


Рис. 183

Таким образом, радиус OC перпендикулярен любой прямой BC , проведенной в плоскости α через ее точку C . Значит, радиус OC перпендикулярен плоскости α .

Теорема 3. Если плоскость проходит через точку сферы и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она является касательной плоскостью сферы.

Доказательство. Пусть плоскость γ проходит через точку M сферы и перпендикулярна радиусу OM (рис. 184). Пусть N — произвольная точка плоскости γ , отличная от точки M . Треугольник OMN прямоугольный с гипотенузой ON , и она длиннее катета. Поэтому точка N расположена вне сферы. Получается, что любая точка плоскости γ , кроме точки M , не принадлежит сфере. Значит, точка M — единственная общая точка плоскости γ и сферы, а поэтому плоскость γ является касательной плоскостью сферы.

Теоремы 2 и 3 выражают соответственно *свойство и признак касательной плоскости сферы*.

Теорема 4. *Две сферы пересекаются по окружности, плоскость которой перпендикулярна прямой, проходящей через центры сфер.*

Доказательство. Пусть имеются две пересекающиеся сферы с центрами O_1 и O_2 , и A — какая-либо их общая точка (рис. 185). Через точку A проведем плоскость α , перпендикулярную прямой O_1O_2 . Пусть эта плоскость пересекает прямую O_1O_2 в точке B . В соответствии с теоремой 1 плоскость α пересекает одну и другую сферы по окружности с центром B . Получили, что окружность с центром B является общей окружностью данных сфер.

Других общих точек данные окружности не имеют. Допустим, что это не так. Пусть C — какая-либо общая точка сфер, не принадлежащая окружности с центром B . Через точки C , O_1 и O_2 проведем плоскость, которая пересечет сферы по окружностям с центрами O_1 и O_2 . Эти окружности пересекаются в двух точках, которые принадлежат окружности с центром B , и вместе с этим им обоим принадлежит точка C .

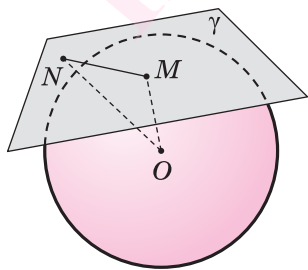


Рис. 184

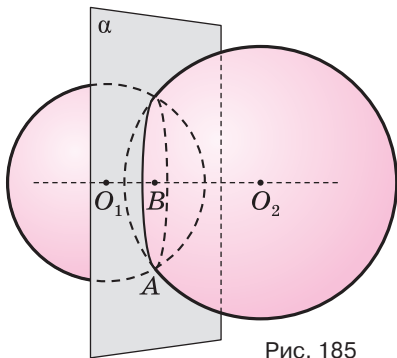


Рис. 185

Но это противоречит утверждению о том, что две окружности имеют не более двух общих точек.

Прежде чем доказывать утверждение о поверхности сферы, обобщим утверждения о боковых поверхностях конуса, усеченного конуса и цилиндра.

Теорема 5. *Боковая поверхность конуса, усеченного конуса, цилиндра равна боковой поверхности цилиндра с той же высотой и радиусом основания, равным длине перпендикуляра, соединяющего середину образующей с точкой на оси этого тела.*

Доказательство. Пусть есть конус с вершиной S , основанием которого является круг с центром O . Пусть SAB — осевое сечение конуса (рис. 186). В плоскости AOS к образующей AS из ее середины C возведем перпендикуляр, который пересечет ось SO в некоторой точке D . Прямоугольные треугольники AOS и DCS подобны, так как у них угол при вершине S общий. Поэтому $\frac{OA}{OS} = \frac{CD}{CS}$, или $\frac{OA}{OS} = \frac{2CD}{2CS}$, или $\frac{OA}{OS} = \frac{2CD}{AS}$. Отсюда $AS \cdot OA = 2OS \cdot CD$.

С учетом этого для боковой поверхности $S_{\text{бок}}$ конуса будем иметь:

$$S_{\text{бок}} = \pi \cdot AS \cdot OA = 2\pi \cdot OS \cdot CD.$$

Пусть есть усеченный конус, полученный вращением прямоугольной трапеции O_1EGO_2 со средней линией HL вокруг боковой стороны O_1O_2 , которая перпендикулярна основаниям O_1E и O_2G , отрезок EM — проекция EG на основание O_1E (рис. 187). В плоскости O_1EG к образующей EG усеченного конуса из ее середины H возведем перпендикуляр, кото-

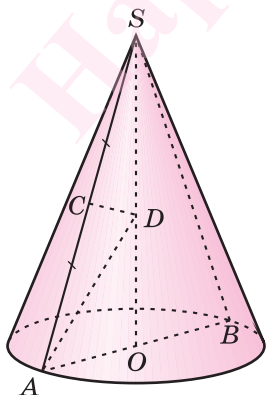


Рис. 186

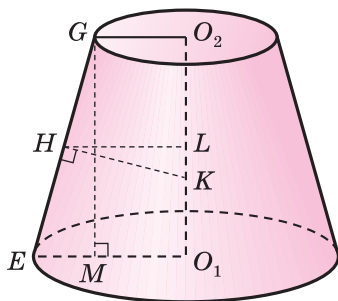


Рис. 187

рый пересечет ось O_1O_2 в некоторой точке K . Прямоугольные треугольники EGM и KHL подобны, так как их стороны попарно перпендикулярны. Поэтому $\frac{HK}{HL} = \frac{EG}{GM}$, или $\frac{HK}{HL} = \frac{EG}{O_1O_2}$. Отсюда $EG \cdot HL = O_1O_2 \cdot HK$.

С учетом этого для боковой поверхности $S_{\text{бок}}$ усеченного конуса будем иметь:

$$S_{\text{бок}} = \pi \cdot EG \cdot HL = 2\pi \cdot O_1O_2 \cdot HK.$$

Для цилиндра утверждение очевидно (рис. 188).

Теорема 6. *Поверхность сферы равна учетверенной площади большого круга:*

$$S = 4\pi R^2.$$

Доказательство. Пусть есть сфера, образованная вращением полуокружности AB вокруг своего диаметра (рис. 189). Впишем в эту дугу ломаную $AM_1M_2M_3...M_{n-1}M_nB$ с равными звеньями и из точек $M_1, M_2, M_3, ..., M_{n-1}, M_n$ опустим перпендикуляры $M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3, ..., M_{n-1}P_{n-1}, M_nP_n$ на диаметр AB . Пусть $Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_{n-1}, Q_n$ — середины звеньев ломаной. Тогда $OQ_1, OQ_2, OQ_3, ..., OQ_{n-1}, OQ_n$ — срединные перпендикуляры к этим звеньям. При вращении вокруг AB звенья ломаной будут описывать или конусы, или усеченные конусы, или цилиндр. Поэтому, в соответствии с теоремой 5, для образовавшейся поверхности S_n получим

$$S_n = 2\pi \cdot AP_1 \cdot OQ_1 + 2\pi \cdot P_1P_2 \cdot OQ_2 + 2\pi \cdot P_2P_3 \cdot OQ_3 + ... + 2\pi \cdot P_{n-1}P_n \cdot OQ_{n-1} + 2\pi \cdot P_nB \cdot OQ_n.$$

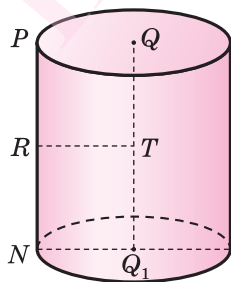


Рис. 188

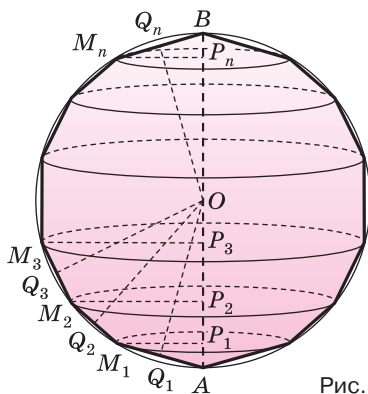


Рис. 189

Учтем, что отрезки $OQ_1, OQ_2, OQ_3, \dots, OQ_{n-1}, OQ_n$ все равны друг другу:

$$S_n = 2\pi \cdot OQ_1 \cdot (AP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + \dots + P_{n-1}P_n + P_nB) = 2\pi \cdot OQ_1 \cdot AB.$$

Пусть радиус сферы равен R . Тогда $AB = 2R$.

Будем неограниченно увеличивать количество звеньев ломаной. Тогда отрезок OQ_1 будет стремиться к радиусу сферы, а выражение $2\pi \cdot OQ_1 \cdot AB$ — к выражению $2\pi \cdot R \cdot 2R$, т. е. к выражению $4\pi R^2$. Этот предел и принимается в качестве площади поверхности сферы.

Учитывая, что πR^2 выражает площадь большого круга, получим, что поверхность сферы равна учетверенной площади большого круга.

- ?
1. Какая поверхность называется сферой, какая точка называется центром сферы?
 2. Какой отрезок называется радиусом сферы; хордой сферы; диаметром сферы?
 3. По какой фигуре пересекаются сфера и плоскость; две сферы?
 4. Какое сечение сферы плоскостью называют большим окружностью, какой круг называют большим кругом?
 5. Какая плоскость называется касательной плоскостью сферы, какая точка называется точкой касания плоскости и сферы?
 6. Какая прямая называется касательной прямой сферы?
 7. Сформулируйте свойство касательной плоскости сферы; признак касательной плоскости сферы.
 8. Сформулируйте утверждение, которое обобщает утверждения о боковых поверхностях конуса, усеченного конуса и цилиндра.
 9. Чему равна поверхность сферы?

774. Секущая плоскость разделяет сферу на две поверхности (рис. 190), каждая из которых называется *сферическим сегментом*.

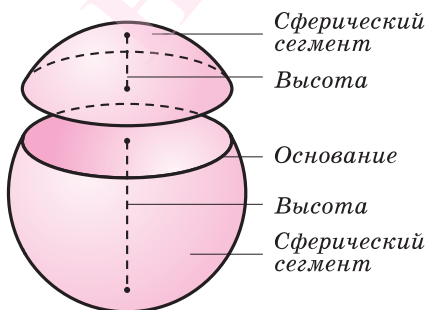


Рис. 190

Окружность сечения называется *основанием сегмента*. Каждый из отрезков, на которые секущая плоскость разделяет перпендикулярный ей диаметр сферы, называют *высотой* соответствующего *сферического сегмента*. Докажите, что поверхность сферического сегмента равна произведению длины

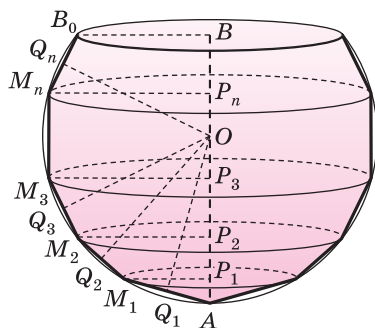


Рис. 191

окружности большого круга и высоты сегмента (рис. 191).

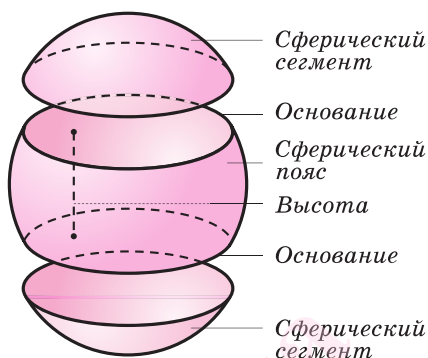


Рис. 192

775. Две параллельные секущие плоскости разделяют сферу на два сегмента и еще одну поверхность (рис. 192), которую называют *сферическим поясом*. Окружности сечений называются *основаниями сферического пояса*. Перпендикуляр, опущенный из одной секущей плоскости на другую, называют *высотой сферического пояса*. Докажите, что поверхность сферического пояса равна произведению длины окружности большого круга и высоты пояса (рис. 193).

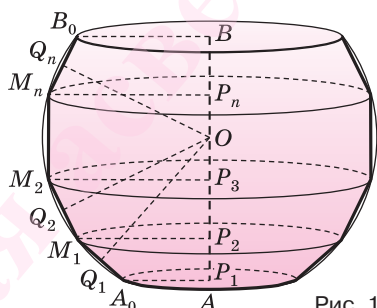


Рис. 193

Перпендикуляр, опущенный из одной секущей плоскости на другую, называют *высотой сферического пояса*. Докажите, что поверхность сферического пояса равна произведению длины окружности большого круга и высоты пояса (рис. 193).

776. Докажите, что:

- а) радиус r сечения сферы плоскостью удовлетворяет условию $0 < r \leq R$, где R — радиус сферы;
- б) радиусы сечений сферы плоскостями, равноудаленными от центра сферы, равны друг другу;
- в) из двух сечений больший радиус имеет то, плоскость которого расположена ближе к центру;
- г) любые две не диаметрально противоположные точки сферы определяют ее единственную большую окружность;
- д) центр сферы является центром ее симметрии;
- е) любая прямая, проходящая через центр сферы, является осью симметрии сферы;
- ж) любая плоскость, проходящая через центр сферы, является плоскостью симметрии сферы.

777. Найдите геометрическое место проекций точки A на все плоскости, которые можно провести через точку B .

778. Определите взаимное расположение сферы с центром O и радиусом R и плоскости ABC , учитывая, что треугольник ABC есть основание треугольной пирамиды $OABC$ с высотой OH и:

- а) $R = 3$ дм, $OH = 30$ см; в) $R = 1$ дм, $OH = 9$ см;
б) $R = 6$ м, $OH = 190$ см; г) $R = 0,7$ дм, $OH = 8$ см.

779. Найдите длину окружности, являющейся:

- а) сечением сферы с радиусом 82 см плоскостью, отстоящей от центра сферы на 18 см;
б) геометрическим местом точек сферы с диаметром 25 см, отстоящих от данной точки P этой сферы на 15 см.

780. Секущая плоскость отстоит на d от центра сферы с радиусом R . Найдите:

- а) площадь S сечения, учитывая, что $R = 18$ см, $d = 12$ см;
б) R , учитывая, что площадь сечения равна 18π см², $d = 3$ см.

781. Точка M находится в плоскости, касающейся сферы с радиусом R в точке A . Найдите наименьшее и наибольшее расстояния от точки M до точек сферы, учитывая, что:

- а) $MA = 15$ см и $R = 112$ см; б) $MA = 16$ см и $R = 63$ см.

782. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости:

- а) прямоугольника, вершины которого лежат на сфере с радиусом 30 см, а диагональ равна 48 см;
б) треугольника, вершины которого лежат на сфере с радиусом 26 см, а стороны равны 12 см, 16 см и 20 см.

783. Определите, через какие две точки сферы можно провести:

- а) бесконечно много больших окружностей;
б) только одну большую окружность.

784. Вершины прямоугольного треугольника с катетами 18 см и 24 см лежат на сфере. Определите:

- а) положение центра сферы, радиус которой равен 15 см;
б) расстояние от центра сферы с радиусом 65 см до плоскости треугольника.

785. Докажите, что вершины двух прямоугольников, которые лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону, принадлежат одной сфере.

786. Найдите расстояние от центра до плоскости треугольника, стороны которого касаются сферы с радиусом 5 см и равны:

- а) 10 см, 10 см и 12 см; б) 13 см, 14 см и 15 см.

787. Найдите расстояние от центра сферы с радиусом 10 см до плоскости ромба, диагонали которого равны 15 см и 20 см, а все стороны касаются сферы.

788. Сфера касается сторон треугольника с длинами 10 см, 10 см и 12 см, а ее центр отстоит на 13 см от вершины большего угла. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.

789. Через середину радиуса R сферы перпендикулярно к нему проведена секущая плоскость. Найдите:

- а) радиус полученного сечения;
б) площадь боковой поверхности и объем конуса, вершиной которого является центр сферы, а основанием — полученное сечение.

790. Через конец диаметра сферы с радиусом R проведена секущая плоскость под углом α к диаметру. Найдите длину полученного сечения, учитывая, что:

- а) $R = 3$ см, $\alpha = 30^\circ$; б) $R = 5$ м, $\alpha = 45^\circ$.

791. Найдите радиус окружности, по которой пересекаются сферы, учитывая, что их радиусы равны R , а расстояние между центрами — $1,6 R$.

792. Найдите геометрическое место:

- а) центров сфер, которым принадлежат вершины данного треугольника;
б) центров сфер данного радиуса, которые касаются граней данного двугранного угла.

793. Есть тело, ограниченное двумя сферами с общим центром. Докажите, что площадь его сечения плоскостью, прохо-

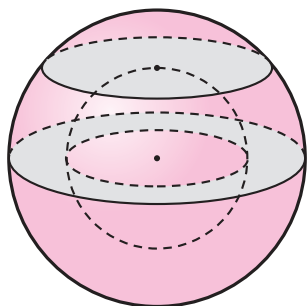


Рис. 194

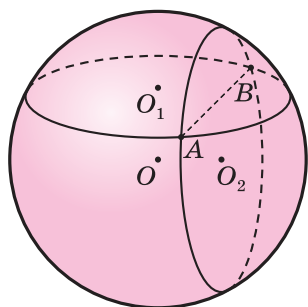


Рис. 195

дящей через центр сфер, равна площади сечения плоскостью, касательной к внутренней сфере (рис. 194).

794. Перпендикулярные плоскости так пересекают сферу, что полученные сечения имеют единственную общую точку, а их радиусы равны r_1 и r_2 . Найдите поверхность сферы.

795. Через точку сферы с радиусом R проведены две плоскости, из которых одна касается сферы, а другая наклонена к касательной плоскости под углом φ . Найдите длину окружности сечения.

796. Вершина конуса принадлежит сфере, его ось проходит через центр, а образующая пересекает поверхность сферы. Найдите поверхность части конуса, расположенную внутри сферы, учитывая, что радиус

сферы равен 12 см, а угол при вершине осевого сечения конуса — 30° .

797. Сферу с радиусом 14 см пересекают две перпендикулярные плоскости по равным окружностям с общей хордой 4 см (рис. 195). Найдите радиусы окружностей.

798. Найдите длину линии пересечения сфер, радиусы которых равны 25 дм и 29 дм, а расстояние между центрами — 36 дм.

799. Найдите радиус сферы и расстояние между точками ее касания с гранями двугранного угла в 120° , учитывая, что центр сферы отстоит на a от ребра угла.

800. Прямая отстоит на d от центра сферы с радиусом R . Докажите, что:

- а) если $d < R$, то прямая пересекает сферу в двух точках;
- б) если $d = R$, то прямая имеет только одну общую точку со сферой;
- в) если $d > R$, то прямая не имеет со сферой общих точек.

801. Найдите площадь сферы, радиус которой равен:

- а) 6 см; б) 2 дм; в) $\sqrt{2}$ м; г) $2\sqrt{3}$ см.

802. Докажите, что:

- а) поверхности сфер пропорциональны квадратам их радиусов;
б) полная поверхность цилиндра, полученного при вращении квадрата вокруг прямой, содержащей одну из его сторон, равна площади сферы, радиус которой равен стороне квадрата;
в) площадь сферы равна площади полной поверхности конуса, осевое сечение которого есть равносторонний треугольник с высотой, равной диаметру сферы.

803. Найдите поверхность сферы, учитывая, что:

- а) длина большой окружности равна $6\sqrt{\pi}$ м;
б) радиусы двух ее параллельных сечений, отстоящих на 3 см, равны 9 см и 12 см.

804. Найдите радиус:

- а) сферы, поверхность которой равна 324π см²;
б) круга, площадь которого равна поверхности сферы с радиусом 5 м.

805. На сфере с радиусом R выбраны такие точки A, B, C и D , что $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 2\varphi$ и $AD = BD = CD$. Найдите:

- а) хорды AB и AD ;
б) площадь сечения сферы плоскостью ABC .

806. Вне сферы с радиусом 10 см выбрана точка M на расстоянии 16 см от ее ближайшей точки. Найдите длину такой окружности на сфере, все точки которой отстоят от точки M на 24 см.

807. Средний радиус Земли равен 6371 км. Найдите:

- а) площадь суши, учитывая, что вода покрывает примерно $\frac{3}{4}$ земной поверхности;
б) длину тропика, широта которого равна $23^\circ 27'$;
в) длину полярного круга, широта которого равна $66^\circ 33'$;
г) длину параллели, на которой расположен Минск ($53^\circ 56'$ северной широты).

808. Определите, сколько кожи пойдет на покрывку футбольного мяча с радиусом 10 см, добавив на швы 8 % площади поверхности мяча.

809. Телевизионные волны распространяются по прямой. Определите, на каком расстоянии можно принять телепередачу, учитывая, что высота телевизионной башни станции равна:

- а) 150 м; б) 308 м; в) 537 м.

810. Определите, какой путь проходит за час вследствие вращения Земли вокруг своей оси город:

- а) Могилев, который находится на $53^\circ 54'$ северной широты;
б) Белыничи, который находится на $53^\circ 55'$ северной широты;
в) Витебск, который находится на $55^\circ 12'$ северной широты;
г) Брест, который находится на $52^\circ 06'$ северной широты.

811. Радиус сферического сегмента равен r , а дуга осевого сечения — α . Найдите:

- а) длину окружности основания сегмента;
б) высоту сегмента.

812. Радиус сферического пояса равен r , а углы, под которыми видны из центра сферы диаметры его оснований, — α и β . Найдите высоту пояса.

813. Найдите поверхность сферического пояса, радиусы оснований которого равны:

- а) 16 см и 33 см, а высота — 7 см;
б) 20 м и 24 м, а радиус сферы — 25 м.

814. Основания сферического пояса равны 144π см² и 25π см², а его высота — 17 см. Найдите радиус сферы.

815. Найдите поверхность сферического сегмента, у которого:

- а) радиус основания равен r , а дуга осевого сечения — 90° ;
б) радиус основания равен r , а дуга осевого сечения — 60° ;
в) высота равна h , а дуга осевого сечения — 120° .

816. Решите уравнение:

- а) $1,5^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$; г) $3^x + 4 \cdot 3^{x+1} = 13$;
б) $5^{x^2-5x-6} = 1$; д) $5^{2x} - 5^x - 600 = 0$;
в) $2^x + 2^{x-3} = 18$; е) $9^x - 3^x - 6 = 0$.

817. Решите неравенство:

- а) $3^{a-2} > 9$; г) $0,5^{z^2+2} \geq \frac{1}{4}$; ж) $3^{|m-2|} < 9$;
б) $5^{2b} > \frac{1}{25}$; д) $8,4^{\frac{v-3}{v^2+1}} < 1$; з) $2^{|n-2|} > 4^{|n+1|}$;
в) $0,7^{x^2+2x} < 0,7^3$; е) $\frac{4^l - 2^{\frac{l+1}{2}} + 8}{2^{1-l}} < 8^l$; и) $4^{|p+1|} > 16$.

818. Решите уравнение:

- а) $9^m - 8 \cdot 3^m - 9 = 0$; д) $5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{l-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{l+1} = 162$;
б) $100^n - 11 \cdot 10^n + 10 = 0$; е) $5 \cdot 9^y + 9^{y-2} = 406$;
в) $36^p - 4 \cdot 6^p - 12 = 0$; ж) $5^{k+1} + 8^{k+1} = 13$;
г) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} = 4,8$; з) $7^{m-2} = 4^{2-m}$.

819. Решите уравнение:

- а) $\lg^2 u - 3 \lg u = 4$; г) $\log_2(m-2) + \log_2(m-3) = 1$;
б) $\lg(v-2) + \lg v = \lg 3$; д) $\log_3(5-q) + \log_3(-1-q) = 3$;
в) $\ln(t+2) + \ln t = \ln 15$; е) $\log_{\sqrt{6}}(x-1) + \log_{\sqrt{6}}(x+4) = 2$.

820. Решите неравенство:

- а) $\log_2(x-2) \leq 2$; д) $\log_3(v-1) \leq 2$;
б) $\log_3(7-y) > 1$; е) $\log_{\frac{1}{5}}(2-w) > -1$;
в) $\log_{\frac{1}{2}}(2z+1) > -2$; ж) $\log_3(5-4a) < \log_3(a-1)$;
г) $\log_{\frac{1}{2}}(3-5u) < -3$; з) $\log_{0,3}(2b+5) \geq \log_{0,3}(b+1)$.

821. Решите неравенство:

- а) $\log_{\sqrt{6}}(x-4) + \log_{\sqrt{6}}(x+1) \leq 2$;
б) $\log_{3\sqrt{2}}(b-5) + \log_{3\sqrt{2}}(b+12) \leq 2$;
в) $\log_3(8y^2+y) > 2 + \log_3 y^2 + \log_3 y$;
г) $\log_2 a + \log_2(a-3) > \log_2 4$;
д) $\log_{\frac{1}{5}}(z-10) - \log_{\frac{1}{5}}(z+2) \geq -1$;
е) $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(r+10) + \log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(r+4) > -2$.

822. Решите уравнение:

- а) $2\cos^2 t + \cos t - 6 = 0$; в) $3\sin^2 x - 5 \sin x - 2 = 0$;
б) $2\cos^2 y + 5 \cos y - 3 = 0$; г) $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$.

823. Решите уравнение:

- а) $\cos(3x - 4\pi) = \sin(\pi - x)$;
б) $\cos 5y + \cos 7y = \cos(\pi + 6y)$;
в) $\sin z + 2 \sin 2z = -\sin 3z$;
г) $\cos 5c - \sin 5c = \sin 7c - \cos 7c$;
д) $\sin 3r = \sin 2r + \sin r$;
е) $\cos 6a = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2a\right)$.

824. Решите уравнение:

- а) $\sqrt{3} \sin y + \cos y = \sqrt{2}$;
б) $\sin 5z = \sqrt{3}(1 + \cos 5z)$;
в) $\sin 5t + \cos 5t = \sqrt{2} \cos 13t$;
г) $\sin(\pi - 6a) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 6a\right) = \sqrt{3}$;
д) $2\cos^2 c + 2\sqrt{3} \cos c \sin c + 1 = 0$;
е) $3\sin b - 5\sin\left(7b + \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos b$.

825. Есть два прямоугольных треугольника с площадями 840 см^2 и 672 см^2 . Когда их приложили друг к другу одной парой катетов и построили, как на рисунке 196, прямоугольный треугольник с площадью, равной суммарной площади данных треугольников, то второй катет этого треугольника оказался равным 54 см . Если то же проделать для другой пары катетов данных треугольников (рис. 197), то в полученном треугольнике второй катет будет равен 27 см . Найдите катеты исходных треугольников.

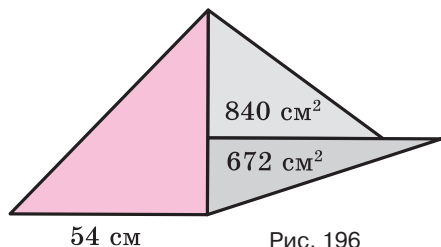


Рис. 196

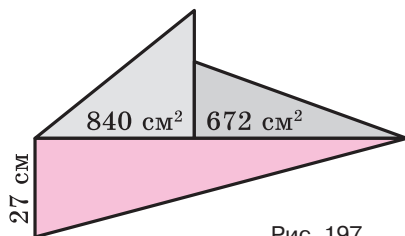


Рис. 197

826. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон AB , BC и CA в точках F , G и H соответственно. Через точку G и конец K диаметра HK проведена прямая, которая пересекает прямую HF в точке L . Докажите, что прямые BL и AC параллельны.

827. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \\ xy = z^2 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях переменных a и b числа в решении системы являются положительными и различными.

828. Дробно-линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x) > g(x)$ при всех значениях x , принадлежащих областям определения обеих функций. Докажите, что функция $f(x) - g(x)$ постоянна на своей области определения.

829. Докажите, что для любых положительных чисел a_1 ,

$$a_2, \dots, a_n \text{ верно неравенство } \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > \frac{n}{4}.$$

17. Шар

Шаром называется тело, полученное вращением круга вокруг какого-либо его диаметра (рис. 198).

Границей шара является сфера. Центр, радиус, диаметр сферы называют также *центром*, *радиусом*, *диаметром шара* соответственно. Расстояние от центра шара до любой его точки не больше радиуса шара.

Сечением шара плоскостью является круг, радиус которого изменяется в пределах от нуля до радиуса шара (рис. 199).

Теорема 7. *Объем тела, полученного вращением треугольника вокруг прямой, лежащей в его плоскости, прохо-*

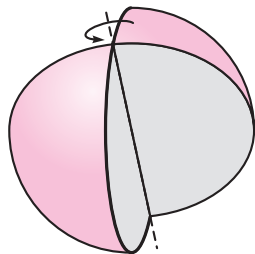


Рис. 198

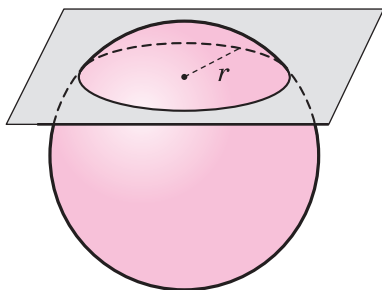


Рис. 199

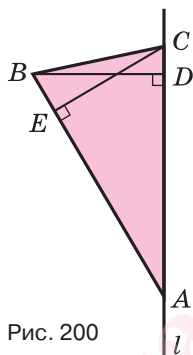


Рис. 200

дящей через его вершину и не имеющей с треугольником общих внутренних точек, равен третьей доле произведения поверхности, образованной стороной, лежащей против той вершины треугольника, которая принадлежит оси вращения, и высоты, проведенной к этой стороне.

▲ **Доказательство.** Пусть есть тело, полученное вращением треугольника ABC вокруг прямой l , которая лежит в плоскости треугольника, проходит через его вершину и не имеет с треугольником общих внутренних точек. Пусть вершина C принадлежит оси l , а CE — высота, проведенная к стороне AB против вершины C . Докажем, что объем V тела вращения равен

$$\frac{1}{3} S_{AB} \cdot CE,$$

где S_{AB} обозначает поверхность, образованную вращением стороны AB .

Пусть сторона AC лежит на оси вращения l и BD — перпендикуляр, опущенный из вершины B на прямую l (рис. 200). Тогда стороны AB и CB опишут поверхности двух конусов с общим радиусом BD и высотами DA и DC соответственно. Для объема V тела вращения получим:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi \cdot BD^2 \cdot DA + \frac{1}{3} \pi \cdot BD^2 \cdot DC = \frac{1}{3} \pi \cdot BD^2 \cdot (DA + DC) = \\ &= \frac{1}{3} \pi \cdot BD \cdot BD \cdot AC. \end{aligned}$$

Теперь обратим внимание на то, что $BD \cdot AC = AB \cdot CE$, так как одно и другое произведения выражают удвоенную площадь треугольника ABC . Поэтому

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot BD \cdot AB \cdot CE = \frac{1}{3} (\pi \cdot BD \cdot AB) \cdot CE = \frac{1}{3} S_{AB} \cdot CE.$$

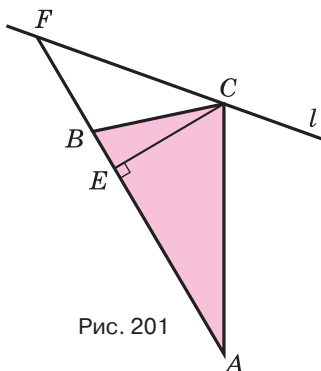


Рис. 201

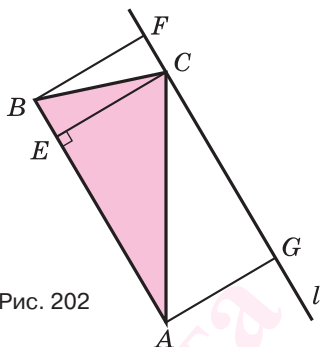


Рис. 202

Пусть сторона AC не лежит на оси вращения l , а сторона AB не параллельна этой оси (рис. 201). Тогда прямая AB пересекает ось l в некоторой точке F , и объем V тела вращения равен разности объемов тел, полученных вращением треугольников CAF и CBF . Учитывая это и то, что сторона CF этих треугольников принадлежит оси вращения, для объема V получим:

$$V = \frac{1}{3} S_{AF} \cdot CE - \frac{1}{3} S_{BF} \cdot CE = \frac{1}{3} (S_{AF} - S_{BF}) \cdot CE = \frac{1}{3} S_{AB} \cdot CE.$$

Пусть сторона AC не лежит на оси вращения l , а сторона AB параллельна этой оси (рис. 202). Из точек A и B опустим перпендикуляры AG и BF на ось вращения l . Объем V тела вращения можно получить, вычитая из объема цилиндра, полученного вращением прямоугольника $ABFG$, объемы двух конусов, полученных вращением треугольников CBF и CAG . Поэтому:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot CE^2 \cdot AB - \left(\frac{1}{3} \pi \cdot CE^2 \cdot CF + \frac{1}{3} \pi \cdot CE^2 \cdot CG \right) = \pi \cdot CE^2 \cdot AB - \\ &- \frac{1}{3} \pi \cdot CE^2 \cdot (CF + CG) = \pi \cdot CE^2 \cdot AB - \frac{1}{3} \pi \cdot CE^2 \cdot AB = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot CE^2 \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot (2\pi \cdot CE \cdot AB) \cdot CE = \frac{1}{3} S_{AB} \cdot CE, \end{aligned}$$

так как выражение $2\pi \cdot CE \cdot AB$ задает поверхность, образованную вращением стороны AB . ▲

Теорема 8. Объем тела, полученного вращением кругового сектора вокруг прямой, проходящей через его центр, лежащей в его плоскости и не имеющей с ним общих внутренних точек, равен третьей доле произведения радиуса сектора и поверхности, образованной при вращении дуги сектора.

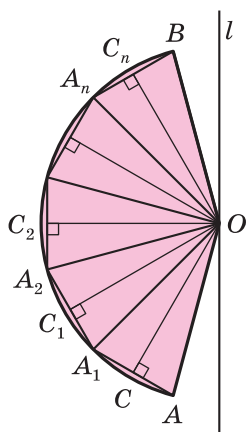


Рис. 203

Доказательство. Пусть имеется тело, полученное вращением кругового сектора AOB с радиусом R вокруг прямой l , проходящей через центр сектора O и не имеющей с ним общих внутренних точек. Впишем в этот сектор ломаную $AA_1A_2...A_{n-1}A_nB$ с равными звеньями (рис. 203). Объем тела, полученного вращением этой ломаной вокруг прямой l , равен сумме объемов тел, полученных вращением треугольников $AOA_1, A_1OA_2, \dots, A_{n-1}OA_n, A_nOB$. Пусть $OC, OC_1, \dots, OC_n$ — высоты этих треугольников. Применив теорему 7, получим:

$$V = \frac{1}{3} S_{AA_1} \cdot OC + \frac{1}{3} S_{A_1A_2} \cdot OC_1 + \dots + \frac{1}{3} S_{A_nB} \cdot OC_n.$$

Но $OC = OC_1 = \dots = OC_n$. Поэтому

$$V = \frac{1}{3} (S_{AA_1} + S_{A_1A_2} + \dots + S_{A_nB}) \cdot OC = \frac{1}{3} S_n \cdot OC,$$

где S_n — поверхность, образованная при вращении n -звенной ломаной.

Будем увеличивать количество сторон ломаной, вписанной в круговой сектор AOB . Тогда высота OC будет стремиться к радиусу R , а поверхность S_n — к поверхности $S_{\cup AB}$. Поэтому объем V стремится к выражению $V = \frac{1}{3} S_{\cup AB} \cdot R$, которое и принимается в качестве объема тела, образованного вращением кругового сектора AOB вокруг прямой l , проходящей через центр сектора O и не имеющей с ним общих внутренних точек.

Следствие 1. Объем шара равен третьей доле произведения его поверхности и радиуса:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

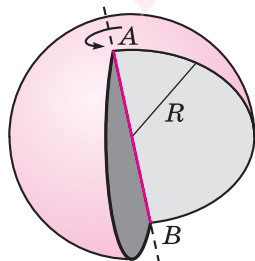


Рис. 204

Действительно, шар с радиусом R можно рассматривать как тело, образованное вращением сектора-полукруга вокруг диаметра (рис. 204). Тогда соответствующая окружность образует сферу. В соответствии с теоремой 8 получим:

$$V = \frac{1}{3} S_{\cup AB} \cdot R = \frac{1}{3} \cdot 4\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Рассмотрим комбинации шара с другими телами.

Вписанным в шар многогранником называется многогранник, все вершины которого лежат на соответствующей сфере (рис. 205). *Описанным около шара многогранником* называется многогранник, все грани которого касаются соответствующей сферы (рис. 206).

Вписанным в шар цилиндром называется цилиндр, окружности оснований которого принадлежат соответствующей сфере (рис. 207). *Описанным около шара цилиндром* называется цилиндр, основания и все образующие которого касаются соответствующей сферы (рис. 208).

Вписанным в шар конусом называется конус, вершина и окружность основания которого принадлежат соответствующей сфере (рис. 209). *Описанным около шара конусом* называется конус, основание и все образующие которого касаются соответствующей сферы (рис. 210).

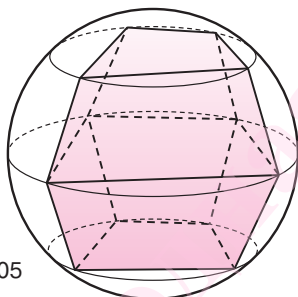


Рис. 205

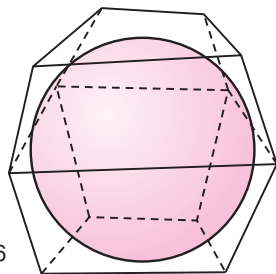


Рис. 206

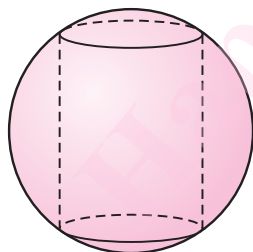


Рис. 207

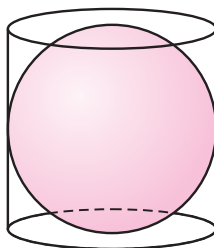


Рис. 208

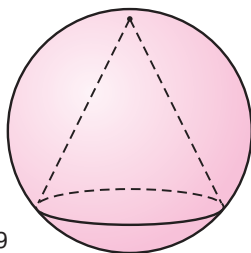


Рис. 209

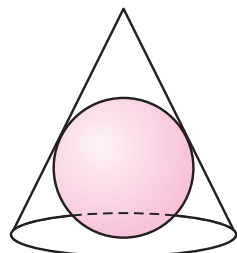


Рис. 210

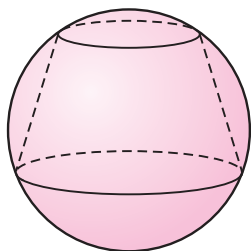


Рис. 211

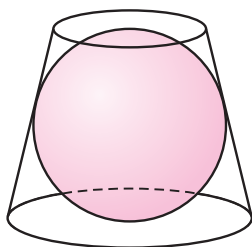


Рис. 212

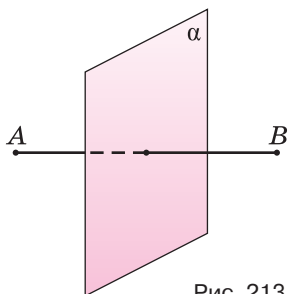


Рис. 213

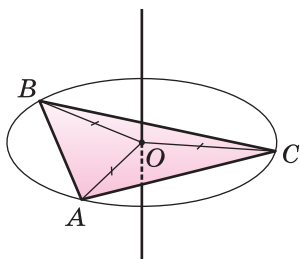


Рис. 214

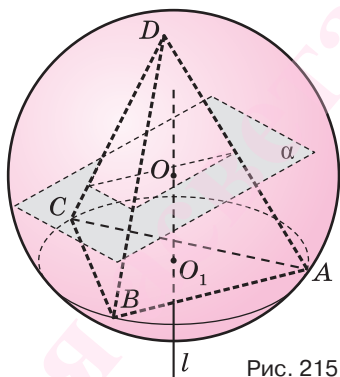


Рис. 215

Вписанным в шар усеченным конусом называется усеченный конус, окружности оснований которого принадлежат соответствующей сфере (рис. 211). *Описанным около шара усеченным конусом* называется конус, основания и все образующие которого касаются соответствующей сферы (рис. 212).

Теорема 9. *Около каждой треугольной пирамиды можно описать единственный шар.*

Доказательство. Сначала обратим внимание на то, что геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка, есть *плоскость*, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная ему (рис. 213). Она называется *серединной плоскостью отрезка*. Геометрическим местом точек, равноудаленных от вершин треугольника, является прямая, проходящая через центр описанной около треугольника окружности и перпендикулярная его плоскости (рис. 214).

Пусть есть треугольная пирамида $ABCD$. Через центр O_1 окружности, описанной около грани ABC , проведем прямую l , перпендикулярную плоскости этой грани (рис. 215). Все точки прямой l равноудалены от вершин A, B, C . Построим серединную плоскость α отрезка AD , она пересечет прямую l в

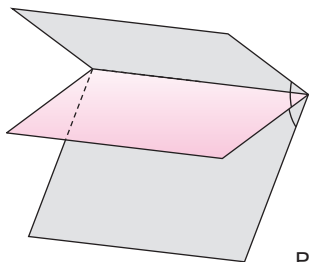


Рис. 216

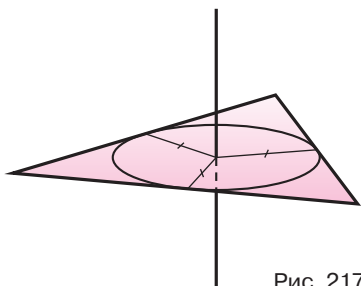


Рис. 217

некоторой точке O . Вершины A и D равноудалены от точки O . А поскольку вершины A, B, C равноудалены от точки O , то все четыре вершины A, B, C, D равноудалены от точки O . Получили, что все вершины пирамиды $ABCD$ принадлежат сфере с центром O , а это означает, что шар с центром O и радиусом OA и есть шар, описанный около пирамиды $ABCD$.

Единственность найденного шара следует из того, что прямая l и ее точка O определяются однозначно.

Следствие 2. *Четыре точки пространства, не лежащие в одной плоскости, определяют единственную сферу, единственный шар.*

Теорема 10. *В каждую треугольную пирамиду можно вписать единственный шар.*

Доказательство. Сначала обратим внимание на то, что геометрическим местом точек, равноудаленных от граней двугранного угла, является полуплоскость, граница которой совпадает с ребром двугранного угла и которая делит этот угол пополам (рис. 216). Она называется *биссекторной плоскостью угла*. Геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон треугольника, является прямая, проходящая через центр вписанной в треугольник окружности и перпендикулярная его плоскости (рис. 217).

Пусть есть треугольная пирамида $PQRS$. Пусть биссекторные плоскости двугранных углов SQ и PS пересекаются по прямой l (рис. 218). Каждая точка прямой l равноудалена от плоскостей SQP

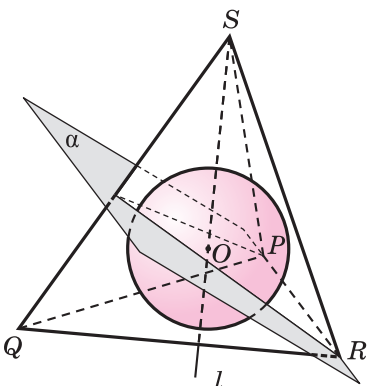


Рис. 218

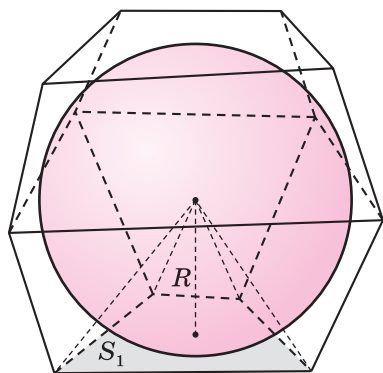


Рис. 219

и SQR , а также от плоскостей SPR и SPQ . Поэтому каждая точка прямой l равноудалена от боковых граней пирамиды. Построим биссекторную плоскость α двугранного угла PR , она пересечет прямую l в некоторой точке O . Эта точка равноудалена от граней SPR и PQR . А поскольку точка O как точка прямой l равноудалена от граней SPQ , SPR , SRQ , то все четыре грани SPQ , SPR , SRQ , PQR равноудалены

от точки O . Получили, что все грани пирамиды $PQRS$ касаются сферы с центром O , а это означает, что шар с центром O и радиусом OP и есть шар, вписанный в пирамиду $PQRS$.

Единственность найденного шара следует из того, что прямая l и ее точка O определяются однозначно.

Теорема 11. *Объем описанного около шара многогранника равен третьей доле произведения полной поверхности многогранника и радиуса шара.*

Доказательство. Пусть есть многогранник, который описан около шара (рис. 219). Центр шара соединим со всеми вершинами многогранника. Если многогранник имеет n граней, то образуется n пирамид, для которых центр шара является общей вершиной, основания составляют поверхность многогранника, а сами пирамиды вместе составят многогранник. Основания высот этих пирамид совпадают с точками касания, а поэтому сами высоты все равны радиусу r шара.

Пусть площади граней многогранника равны $S_1, S_2, \dots, S_n$. Тогда для объема V многогранника, который равен сумме объемов пирамид, получим:

$$V = \frac{1}{3} S_1 \cdot r + \frac{1}{3} S_2 \cdot r + \dots + \frac{1}{3} S_n \cdot r = \frac{1}{3} (S_1 + S_2 + \dots + S_n) \cdot r = \frac{1}{3} Sr,$$

где S — полная поверхность многогранника.



1. Какое тело называется шаром и какая точка называется центром шара?
2. Какой отрезок называется радиусом шара; хордой шара; диаметром шара?
3. По какой фигуре пересекаются шар и плоскость?

4. Сформулируйте утверждение об объеме тела, полученного вращением треугольника вокруг прямой, лежащей в плоскости треугольника, проходящей через его вершину и не имеющей с треугольником общих внутренних точек; об объеме тела, полученного вращением кругового сектора вокруг прямой, лежащей в его плоскости и содержащей диаметр соответствующего круга, не пересекающий этот сектор.

5. Какой многогранник называется вписанным в шар; описанным около шара?

6. Какой шар называется вписанным в многогранник; описанным около многогранника?

7. Какой цилиндр называется вписанным в шар; описанным около шара?

8. Какой шар называется вписанным в цилиндр; описанным около цилиндра?

9. Какой конус называется вписанным в шар; описанным около шара?

10. Какой шар называется вписанным в конус; описанным около конуса?

11. Какой усеченный конус называется вписанным в шар; описанным около шара?

12. Какой шар называется вписанным в усеченный конус; описанным около усеченного конуса?

13. Какая плоскость называется срединной плоскостью отрезка; бисекторной плоскостью двугранного угла?

14. В какой точке находится центр шара, описанного около треугольной пирамиды; центр шара, вписанного в треугольную пирамиду?

15. Сколькими точками пространства определяется сфера?

16. Какой зависимостью связаны объем шара и поверхность описанного около него многогранника?

830. Секущая плоскость разделяет шар на два тела (рис. 220), каждое из которых называется *шаровым сегментом*. Круг сечения называется *основанием сегмента*. Каждый из отрезков, на которые секущая плоскость разделяет перпендикулярный ей диаметр шара, называют *высотой* соответствующего *шарового сегмента*.

Две параллельные секущие плоскости разделяют шар на два шаровых сегмента и еще одно тело (рис. 221), которое на-

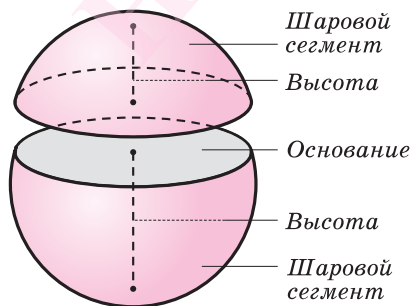


Рис. 220

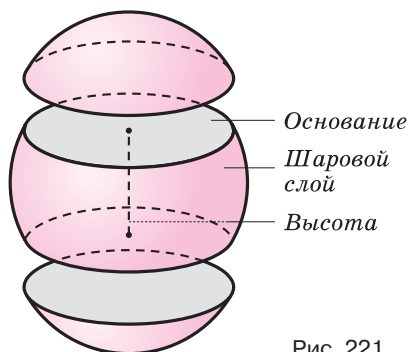


Рис. 221

зывают *шаровым слоем*. Круги сечений называются *основаниями шарового слоя*. Перпендикуляр, опущенный из одной секущей плоскости на другую, называют *высотой шарового слоя*. Докажите, что:

а) объем V шарового сегмента с радиусом R и высотой h вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$ (рис. 222);

б) объем V шарового слоя с радиусом R , радиусами оснований r_1 и r_2 и высотой h вычисляется по формуле $V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$ (рис. 223).

831. Тело, образованное вращением кругового сектора вокруг прямой, проходящей через его центр, лежащей в его плоскости и не имеющей с ним общих внутренних точек, называется *шаровым сектором*. Шаровой сектор может быть двух видов в зависимости от того, принадлежит или нет оси вращения один из крайних радиусов кругового сектора. Первый из этих секторов ограничен сферическим сегментом и конической поверхностью (рис. 224), второй — сферическим поясом и двумя коническими поверхностями (рис. 225). Высота сегмента для первого сектора или перпендикуляр, опущенный из плоскости основания одной конической поверхности на плоскость основания другой поверхности, для второго сектора называется *высотой шарового сектора*. Докажите, что объем шарового сектора с радиусом R и высотой h определяется формулой $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$.

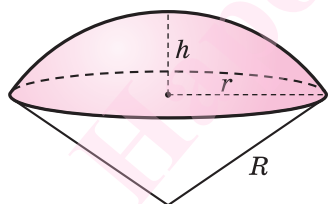


Рис. 222

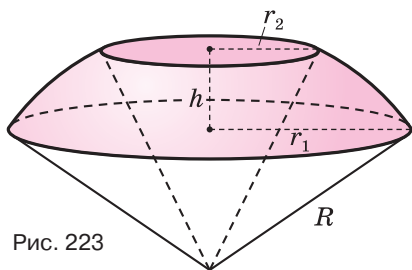


Рис. 223

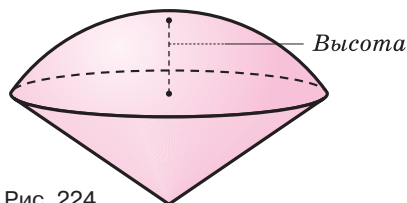


Рис. 224

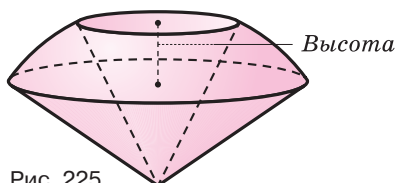


Рис. 225

832. Докажите, что:

- а) геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка, есть его серединная плоскость;
- б) геометрическое место точек, равноудаленных от вершин треугольника, есть прямая, проходящая через центр описанной около треугольника окружности и перпендикулярная его плоскости;
- в) три серединные плоскости сторон треугольника пересекаются по одной прямой, которая проходит через центр описанной около треугольника окружности и перпендикулярна его плоскости;
- г) геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла, есть полуплоскость, граница которой проходит через вершину угла и перпендикулярна его плоскости;
- д) геометрическое место точек, равноудаленных от сторон треугольника, есть прямая, проходящая через центр вписанной в треугольник окружности и перпендикулярная его плоскости;
- е) две биссекторные плоскости двугранных углов треугольной пирамиды при одной вершине пересекаются по прямой, через которую проходит третья биссекторная плоскость двугранного угла при той же вершине.

833. Докажите, что:

- а) около любого цилиндра можно описать шар;
- б) в цилиндр можно вписать шар тогда и только тогда, когда осевое сечение цилиндра является квадратом;
- в) около любого конуса можно описать шар;
- г) в любой конус можно вписать шар;
- д) около любого усеченного конуса можно описать шар;
- е) в усеченный конус можно вписать шар тогда и только тогда, когда в осевое сечение конуса можно вписать окружность или если образующая конуса равна сумме радиусов его оснований, или если высота конуса равна среднему геометрическому диаметров его оснований;
- ж) около любого прямоугольного параллелепипеда можно описать шар.

834. Осевым сечением цилиндра является квадрат. Докажите, что:

- а) центры шаров, вписанного в цилиндр и описанного около него, совпадают и лежат на оси цилиндра;

- б) боковая поверхность цилиндра равна поверхности вписанного в него шара;
- в) полная поверхность цилиндра относится к поверхности вписанного в него шара как $3 : 2$;
- г) объем цилиндра относится к объему вписанного в него шара как $3 : 2$;
- д) центр шара, вписанного в цилиндр, является центром симметрии цилиндра;
- е) центр шара, описанного около произвольного цилиндра, является центром его симметрии.

835. Докажите, что:

- а) центры шаров, вписанного в конус и описанного около него, лежат на прямой, содержащей ось конуса;
- б) отношение объема конуса к объему вписанного в конус шара равно отношению их поверхностей;
- в) центры шаров, вписанного в усеченный конус и описанного около него, не совпадают;
- г) отношение поверхности шара к полной поверхности описанного около него усеченного конуса равно отношению их объемов.

836. Найдите геометрическое место:

- а) середин равных хорд шара;
- б) центров равных круговых сечений шара.

837. Докажите, что:

- а) цилиндр или конус, ось которого проходит через центр шара, пересекает его поверхность по окружностям;
- б) около любой правильной пирамиды можно описать шар;
- в) в любую правильную пирамиду можно вписать шар;
- г) объем полого шара с внешним радиусом R и толщиной стенок a равен $\frac{4a}{3}(3R^2 + a^2 - 3Ra)$.

838. Учитывая, что V — объем шара с радиусом R , а S — площадь его поверхности, найдите:

- а) S и V при $R = 8$ см;
- б) R и S при $V = 113,04$ см³;
- в) R и V при $S = 64\pi$ см².

839. В цилиндрическую мензурку диаметром 2,5 см, наполненную водой до определенного уровня, опускают 4 одинаковых металлических шарика с диаметром 1 см. Определите, на сколько изменится уровень воды в мензурке.

840. Найдите диаметр шара, учитывая, что при опускании в воду он становится легче на 39,6 кг.

841. Учитывая, что плотность меди $8,9 \text{ г/см}^3$, определите, будет ли плавать в воде пустой медный шар с диаметром 10 см и толщиной стенок:

- а) 2 мм; б) 1,5 мм.

842. Определите, во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в:

- а) 3 раза; б) 5 раз; в) n раз.

843. Диаметр Луны составляет приблизительно четвертую долю диаметра Земли. Сравните объемы Луны и Земли.

844. Свинцовый шар, диаметр которого равен 20 см, переплавляется в шарики, диаметры которых в 10 раз меньше. Определите, сколько таких шариков получится.

845. Найдите радиус шара, объем которого равен объему:

- а) цилиндра с высотой 10 см и радиусом 6 см;
б) конуса с высотой 20 см и радиусом основания 10 см.

846. Найдите высоту цилиндра, объем которого равен объему шара, учитывая, что радиус основания цилиндра равен 4 см, а радиус шара — 6 см.

847. Есть четыре тела — куб, шар, цилиндр и конус, причем диаметры оснований цилиндра и конуса равны их высотам. Поверхности всех этих тел равны друг другу. Определите, какое из этих тел имеет наибольший объем, а какое — наименьший.

848. Емкость имеет форму полушара с радиусом R , дополненного цилиндром. Определите, какой высоты должна быть цилиндрическая часть, чтобы емкость имела объем V .

849. Учитывая, что плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит этот диаметр на части:

- а) в отношении 3 : 1, найдите отношение объемов полученных шаровых сегментов;
б) длинами 3 см и 9 см, найдите объемы полученных шаровых сегментов.

850. Определите, сколько кубометров земли понадобится для того, чтобы сделать клумбу, имеющую форму шарового сегмента с радиусом основания 5 м и высотой 60 см.

851. Найдите объем шарового слоя, который образуется, если в шаре с радиусом:

- а) 13 см по разные стороны от его центра провести два равных параллельных сечения с радиусом 5 см;
- б) r провести два параллельных сечения, из которых одно проходит через центр, а другое делит поверхность шара в отношении 1 : 3.

852. Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найдите отношение объема их общей части к объему одного шара.

853. Радиусы поверхностей двояковыпуклой линзы равны 113 мм, а ее толщина — 30 мм. Найдите объем линзы.

854. В шаре радиусом 60 мм просверлено цилиндрическое отверстие диаметром 30 мм, ось которого проходит через центр шара. Найдите объем образовавшегося тела.

855. Диаметр шара равен 30 см и является осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12 см. Найдите объем части шара, заключенной внутри цилиндра.

856. Найдите объем шарового сектора, полученного вращением кругового сектора:

- а) с углом 30° и радиусом R вокруг одного из граничных радиусов;
- б) с радиусом r и дугой 120° вокруг прямой, которая проходит через центр сектора, лежит в его плоскости и составляет с крайними радиусами углы в 30° .

857. Полукруг с радиусом r , разделенный двумя радиусами на три доли, вращается вокруг прямой, которой принадлежит диаметр. Найдите объемы тел, полученных при вращении каждой доли.

858. Найдите объем шарового сектора, дуга осевого сечения которого равна α , если:

- а) радиус шара — r ;
- б) высота сектора — h .

859. Около шара с радиусом r описан прямоугольный параллелепипед. Определите его вид и найдите объем.

860. Найдите радиус шара, описанного около прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 6 см, 9 см, 18 см.

861. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, в котором два шара с радиусом r расположены так, что каждый касается другого шара и пяти граней параллелепипеда.

862. Докажите, что:

а) если в правильную призму можно вписать шар, то центром шара является середина отрезка, соединяющего центры оснований призмы;

б) около прямой призмы можно описать шар тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность;

в) в пирамиду с одинаковыми двугранными углами при основании можно вписать шар, если в основание пирамиды можно вписать окружность.

863. Около шара описана прямая треугольная призма, основанием которой является равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом при вершине α . Найдите высоту призмы.

864. Найдите диаметр шара, описанного около правильной треугольной призмы, учитывая, что боковое ребро призмы равно 4 см, а ребро основания — 6 см.

865. В шар с радиусом r вписана правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны друг другу. Найдите ребро призмы.

866. В шар с радиусом R вписана правильная четырехугольная призма, диагональ которой составляет с боковой гранью угол α . Найдите ее объем.

867. В шар с радиусом R вписан многогранник, состоящий из семи кубов, один из которых имеет общий центр с шаром, а каждый из остальных — общую грань с этим кубом и четыре вершины на поверхности шара. Найдите ребро куба.

868. В шар вписана прямая призма, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами 18 см и 24 см. Найдите объем призмы, учитывая, что радиус шара равен 39 см.

869. В шар вписан цилиндр, в котором угол между диагоналями осевого сечения равен α , а образующая — l . Найдите объем шара.

870. Есть два цилиндра, осевыми сечениями которых являются квадраты, причем один из них описан около шара, а другой вписан в этот шар. Найдите отношение их объемов.

871. Найдите объем шара, вписанного в конус, образующая которого равна:

- а) b и равна диаметру основания конуса;
- б) a и составляет с плоскостью основания угол δ .

872. В конус с углом α при вершине осевого сечения и радиусом основания r вписан шар с радиусом R . Найдите:

- а) r как функцию R и α ;
- б) R как функцию r и α ;
- в) α как функцию R и r .

873. В конус с радиусом основания r и образующей l вписан шар. Найдите длину линии, по которой шар касается боковой поверхности конуса.

874. Шар с радиусом R вписан в усеченный конус. Угол наклона образующей к плоскости нижнего основания конуса равен α . Найдите радиусы оснований и образующую усеченного конуса.

875. Образующая конуса равна l и составляет с основанием угол α . Найдите радиус:

- а) описанного шара;
- б) вписанного шара.

876. В шар вписан конус. Докажите, что радиус шара равен $\frac{h^2 + r^2}{2h}$, где h — высота конуса, r — радиус его основания.

877. Найдите радиус шара, описанного около треугольной пирамиды, все ребра которой равны a .

878. Найдите радиусы шаров, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду и описанного около нее, учитывая, что сторона основания пирамиды равна a и:

- а) плоский угол при вершине — α ;
- б) двугранный угол при основании — 60° .

879. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 20 см, а радиус шара, описанного около пирамиды, — 12,5 см. Найдите объем пирамиды.

880. Найдите объем шара, вписанного в:

- а) правильную шестиугольную пирамиду, сторона основания которой равна a , а боковое ребро — b ;
- б) пирамиду, учитывая, что ее основанием служит ромб со стороной a , острым углом α и двугранными углами β при основании.

881. Найдите радиус шара, который:

- а) описан около правильной треугольной пирамиды, апофема которой равна a и составляет с плоскостью основания угол α ;
- б) вписан в правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания 26 см и высотой 16 см.

882. В правильную четырехугольную пирамиду, сторона основания которой равна 4 см, вписан шар. Найдите объем пирамиды, учитывая, что радиус шара равен 1 см.

883. Определите объем шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, учитывая, что центр шара:

- а) отстоит от вершины пирамиды на a , а от бокового ребра — на b ;
- б) делит высоту пирамиды в отношении $5 : 3$, если считать от вершины, а сторона основания пирамиды равна a .

884. В шар с радиусом R вписана пирамида, основанием которой является равнобедренный треугольник с углом α при вершине, а каждое боковое ребро составляет с основанием угол в 60° . Найдите ее объем.

885. В пирамиду, основанием которой является ромб со стороной a и углом α , вписан шар. Найдите объем шара, учитывая, что две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к нему под углом β .

886. Найдите поверхность и объем шара, описанного около пирамиды, основанием которой является:

а) прямоугольный треугольник с гипотенузой 2 см, а каждое боковое ребро составляет с основанием угол α ;

б) прямоугольник с диагональю 10 см, а боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом β .

887. Найдите радиус шара, описанного около:

а) правильной четырехугольной усеченной пирамиды, у которой стороны оснований 14 дм и 2 дм, а боковое ребро наклонено к основанию под углом в 45° ;

б) пирамиды, у которой основанием является прямоугольник со стороной a и углом между этой стороной и диагональю основания α , а каждое ребро пирамиды составляет с основанием угол в 60° ;

в) правильной треугольной усеченной пирамиды, у которой высота равна 17 см, а радиусы окружностей, описанных около основания, — 5 см и 12 см.

888. Шар касается всех ребер треугольной пирамиды. Найдите его радиус, учитывая, что все ребра пирамиды равны a .

889. Квадрат со стороной a является основанием пирамиды, две боковые грани которой перпендикулярны плоскости основания. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду, учитывая, что большее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α .

890. В треугольную пирамиду с высотами h_1, h_2, h_3, h_4 вписан шар с радиусом R . Докажите, что $\frac{1}{R} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}$.

891. Докажите, что:

а) объем конуса равен третьей доле произведения его полной поверхности и радиуса вписанного шара;

б) если конусы описаны около шара, то их объемы пропорциональны площадям поверхностей.

892. Докажите, что если около шара описать цилиндр и конус, осевые сечения которых есть правильные многоугольники, то:

а) объем цилиндра является средним геометрическим объемов шара и конуса;

б) площади их поверхностей образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2.

893. В конус вписан цилиндр, полная поверхность которого равна боковой поверхности конуса. Наибольший угол между образующими конуса прямой. Докажите, что вершина конуса отстоит от верхнего основания цилиндра на половину образующей конуса.

894. Из шарового сегмента вырезан конус, имеющий с ним общие основание и высоту. Найдите объем оставшейся части сегмента, учитывая, что дуга осевого сечения сегмента равна α , а радиус дуги — R .

895. В шаровой сегмент, дуга осевого сечения которого равна α , вписан шар с объемом V . Найдите разность объемов сегмента и шара.

896. Цену на товар снижали три раза — на 10 %, на 20 % и на 25 %. Определите, на сколько процентов оказалась в результате снижена цена.

897. Магазин продал товар со скидкой в 20 % по сравнению с первоначальной ценой и от этого получил 4 % убытка. Определите, на какой процент прибыли вначале рассчитывал магазин.

898. Собрали 42 кг свежих грибов, которые содержали 95 % воды по массе. После сушки грибы стали весить 3 кг. Определите влажность сушеных грибов.

899. Скорость автомобиля по шоссе на 12,5 % больше скорости по грунтовой дороге. Время, которое он двигался по грунтовой дороге, на 10 % меньше времени движения по шоссе. Определите, на сколько процентов больший путь автомобиль проехал по шоссе, чем по грунтовой дороге.

900. Определите наименьшее возможное количество квартир в доме, учитывая, что процент неприватизированных квартир заключен в пределах от 96,5 % до 97,2 %.

901. Из колбы, в которой находилось 80 г 10 %-го раствора соли, отлили в пробирку некоторую его часть. После выпаривания процентное содержание соли в пробирке повысилось втрое. Когда выпаренный раствор влили назад в колбу, то процентное содержание соли в полученном растворе оказалось на 2 процентных пункта больше, чем в первоначальном. Определите, сколько граммов раствора отливали в пробирку.

902. Есть три сплава. Первый содержит 30 % никеля и 70 % меди, второй — 10 % меди и 90 % марганца, а третий — 15 % никеля, 25 % меди и 60 % марганца. Из них необходимо получить новый сплав, в котором должно быть 40 % марганца. Определите, какое процентное содержание меди может быть в этом сплаве.

903. Из пункта *A* в пункт *B* в 10 ч вышел пешеход, а в 10 ч 15 мин из *B* в *A* выехал велосипедист, который в 11 ч 30 мин встретил пешехода. Если бы велосипедист выехал в 10 ч, то встреча состоялась бы в 11 ч 20 мин. Определите, в котором часу велосипедист приехал в пункт *A*, а пешеход пришел в пункт *B*.

904. Если теплоход и катер плывут по течению реки, то путь из *A* в *B* теплоход проходит в 1,5 раза быстрее катера. При этом катер за час отстает от теплохода на 8 км. Определите скорость теплохода в стоячей воде, учитывая, что обратный путь из *B* в *A* теплоход проходит вдвое быстрее катера.

905. Трое рабочих выполняют определенный заказ за 4 дня. Если бы над этим заказом работали только первый и второй рабочие, то на его выполнение понадобилось бы 6 дней, а если бы только второй и третий — то 8 дней. Определите, на сколько процентов больше производительность труда второго рабочего по сравнению с третьим.

906. Три каменщика различной квалификации выложили кирпичную стену. При этом первый работал 6 ч, второй — 4 ч, третий — 7 ч. Если бы первый каменщик работал 4 ч, второй — 2 ч, третий — 5 ч, то было бы выложено только $\frac{2}{3}$ стены. Определите, за какое время выполнили бы всю работу трое рабочих, если бы все время работали вместе.

907. В цехе есть сборочные линии трех видов, общее количество которых не больше 10. На каждой линии первого, второго и третьего вида за смену собирается соответственно 100, 400 и 30 узлов первого класса сложности и 19, 69 и 5 узлов высшего класса сложности. Определите, сколько линий каждого вида есть в цехе, учитывая, что всего за смену в цехе собирается 1030 узлов первого класса сложности и 181 узел высшего класса сложности.

908. Цех, в котором было несколько одинаковых прессов, за смену выпускал 6480 деталей. В ходе реконструкции каж-

дый пресс заменили новым, с большей производительностью, да еще установили 3 дополнительных, из-за чего сменная выработка увеличилась до 11 200 деталей. Определите, сколько в цехе теперь прессов.

* * *

909. Докажите, что в произвольном треугольнике отношение наименьшей высоты к наименьшей биссектрисе больше $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

910. На окружности ω с центром O выбраны точки A и B . Окружность, проходящая через точки A и O , еще раз пересекает окружность ω в точке N и прямую AB в точке M . Докажите, что $BM = MN$.

911. Докажите тождество

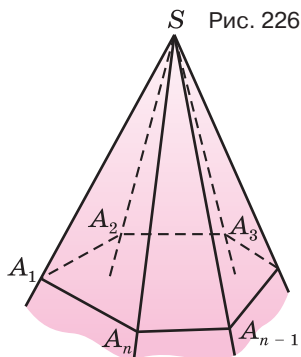
$$\begin{aligned} & \frac{2}{x^2-1} + \frac{4}{x^2-4} + \frac{6}{x^2-9} + \dots + \frac{20}{x^2-100} = \\ & = 11 \left(\frac{1}{(x-1)(x+10)} + \frac{1}{(x-2)(x+9)} + \dots + \frac{1}{(x-10)(x+1)} \right). \end{aligned}$$

912. Докажите, что если $a > b > \frac{2}{3}$, то истинно неравенство $a^3 - b^3 > a^2 - b^2$.

18. Правильные многогранники

Пусть есть плоский многоугольник $A_1A_2A_3\dots A_{n-1}A_n$. Вне плоскости этого многоугольника выберем произвольно точку S и проведем лучи через нее и все точки сторон многоугольника $A_1A_2A_3\dots A_{n-1}A_n$. Эти лучи образуют определенную поверхность (рис. 226), которая разделяет пространство на две области. Ту из областей, которая не содержит целиком никакой прямой, называют *многогранным углом*. Точку S называют *вершиной* многогранного угла, плоские углы $A_1SA_2, A_2SA_3, \dots, A_nSA_1$ — *гранями*, а лучи $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ — *ребрами* многогранного угла (рис. 227).

Многогранный угол называется *выпуклым*, если он расположен по одну



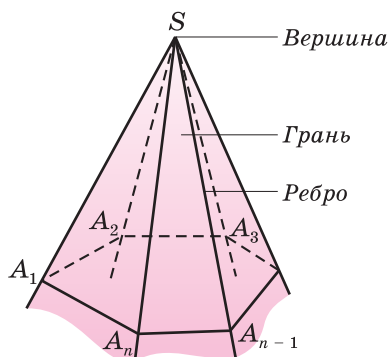


Рис. 227

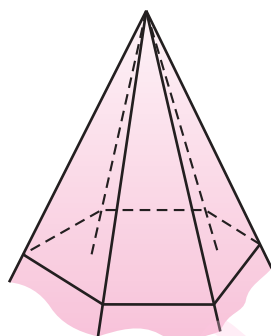


Рис. 228

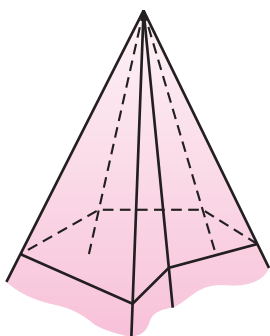


Рис. 229

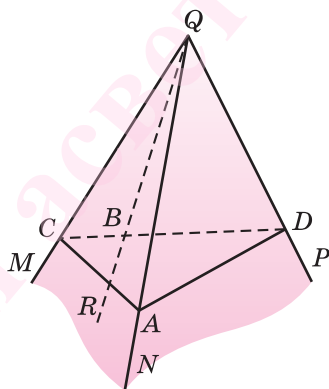


Рис. 230

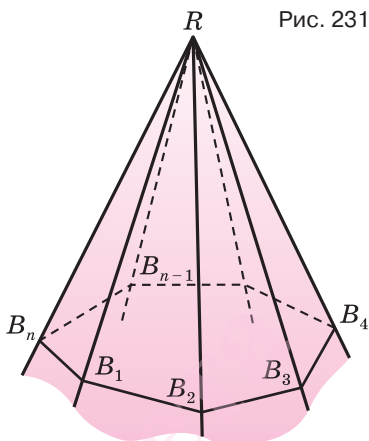
сторону от плоскости любой его грани. Многогранный угол на рисунке 228 выпуклый, а на рисунке 229 — невыпуклый. По количеству граней многогранные углы разделяют на *трехгранные, четырехгранные* и т. д.

Теорема 12. *Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360° .*

▲ **Доказательство.** Установим сначала, что *каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его углов.*

Пусть есть трехгранный угол $QMNP$ (рис. 230). Пусть для определенности угол MQP — больший из плоских углов трехгранного угла. В плоскости грани MQP от луча QP отложим угол PQR , равный углу PQN , и на лучах QN и QR отложим равные отрезки QA и QB . Через прямую AB проведем такую плоскость, которая пересекает ребра QM и QP в некоторых точках C и D . Треугольники AQD и BQD равны, так как у них сторона QD общая, и по построению равны углы BQD

и AQD , а также стороны BQ и AQ . Значит, $DB = DA$. Далее по свойству сторон треугольника получаем $DC < AC + DA$, или $DB + BC < AC + DA$, или $BC < AC$. Теперь, поскольку у треугольников BQC и AQC сторона QC общая, стороны BQ и AQ равны, но $BC < AC$, то $\angle BQC < \angle AQC$. Прибавив к левой и правой частям этого неравенства соответственно углы BQD и AQD , которые равны друг другу, получим, что $\angle BQC + \angle BQD < \angle AQC + \angle AQD$, или $\angle CQD < \angle AQC + \angle AQD$.



Пусть теперь есть выпуклый многогранный угол с вершиной R (рис. 231). Если пересечь его какой-либо плоскостью, то в сечении получим многоугольник $B_1B_2B_3...B_{n-1}B_n$, каждая вершина которого является вершиной трехгранного угла, образованного двумя гранями данного угла и секущей плоскостью. По доказанному для этих трехгранных углов получаем:

$$\begin{aligned}\angle B_nB_1B_2 &< \angle B_nB_1R + \angle B_2B_1R; \\ \angle B_1B_2B_3 &< \angle B_1B_2R + \angle B_3B_2R; \\ \angle B_2B_3B_4 &< \angle B_2B_3R + \angle B_4B_3R; \\ &\dots \angle B_{n-1}B_nB_1 < \angle B_{n-1}B_nR + \angle B_1B_nR.\end{aligned}$$

Сложим покомпонентно эти неравенства:

$$\begin{aligned}&\angle B_nB_1B_2 + \angle B_1B_2B_3 + \angle B_2B_3B_4 + \dots + \angle B_{n-1}B_nB_1 = \\ &= (\angle B_nB_1R + \angle B_1B_2R + \angle B_2B_3R + \dots + \angle B_{n-1}B_nR) + \\ &\quad + (\angle B_2B_1R + \angle B_3B_2R + \angle B_4B_3R + \dots + \angle B_1B_nR).\end{aligned}$$

Теперь обратим внимание на то, что сумма в левой части последнего неравенства есть сумма углов многоугольника $B_1B_2B_3...B_{n-1}B_n$, которая равна $180^\circ \cdot (n - 2)$, а в правой — сумма углов всех треугольников B_1RB_2 , B_2RB_3 , B_3RB_4 , ..., $B_{n-1}RB_n$ и B_nRB_1 , но без их углов при вершине R , которая равна $180^\circ \cdot n - S$, где S выражает сумму плоских углов данного многогранного угла. Таким образом,

$$180^\circ \cdot (n - 2) < 180^\circ \cdot n - S,$$

отсюда

$$S < 360^\circ. \blacktriangle$$

Многогранник, у которого все грани являются равными правильными многоугольниками и все двугранные углы равны друг другу, называется **правильным многогранником**.

Из этого определения следует, что у правильного многогранника равны друг другу все его:

- плоские углы;
- многогранные углы;
- ребра.

Теорема 13. *Количество ребер, сходящихся в каждой вершине правильного многогранника, не больше пяти.*

▲ **Доказательство.** Допустим, что это не так, т. е. в вершине многогранника сходится шесть или больше ребер. Тогда при этой вершине многогранник имел бы шесть или больше равных плоских углов. Учитывая, что сумма этих углов меньше 360° , получаем, что каждый из них меньше 60° . Но это невозможно, поскольку гранями правильного многогранника являются правильные многоугольники, а у них углы не меньше 60° . ▲

Теорема 14. *Количество сторон правильного многоугольника, являющегося гранью правильного многогранника, не больше пяти.*

▲ **Доказательство.** В каждой вершине правильного многогранника сходится не менее трех плоских углов, а поэтому каждый из них должен быть меньше 120° . Вместе с этим угол правильного шестиугольника равен 120° , а угол правильного многоугольника с большим количеством сторон больше 120° . Поэтому правильные многоугольники, количество сторон которых больше пяти, не могут быть гранями правильного многоугольника. ▲

Теорема 15. *Есть пять типов правильных многогранников.*

▲ **Доказательство.** В соответствии с теоремой 14 гранями многогранника могут быть правильные треугольники, четырехугольники или пятиугольники.

Если гранями правильного многогранника служат треугольники, то, с учетом теоремы 13, в вершинах многогранника могут сходиться три, четыре или пять ребер. Если гранями правильного многогранника служат четырехугольники или пятиугольники, то в вершинах многогранника может сходиться только три ребра. Значит, существует не более пяти видов правильных многогранников.

Чтобы убедиться, что такие виды многогранников существуют, достаточно указать способ построения каждого из них.

Прежде всего отметим, что правильным многогранником, гранями которого служат правильные четырехугольники, т. е. квадраты, является *куб*, который еще называют *правильным гексаэдром*. Куб можно построить так. В произвольно выбранной плоскости построить квадрат, через его стороны провести плоскости, перпендикулярные выбранной плоскости, и провести еще одну плоскость, параллельную выбранной плоскости и отстоящую от нее на сторону квадрата (рис. 232). Мы видим, что гексаэдр имеет 6 граней, 12 ребер и 8 вершин.

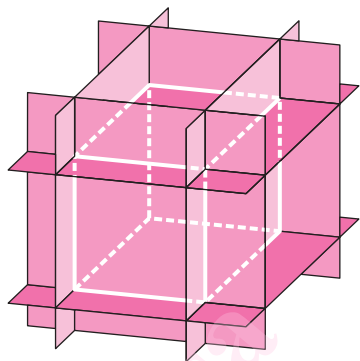


Рис. 232

Построение многогранника, в каждой вершине которого сходится по три треугольные грани, может быть таким. Построить куб. Выбрать одну из его вершин *A* и в каждой грани с этой вершиной выбрать вершину, противолежащую вершине *A*. Пусть это вершины *B*, *C*, *D*. Точки *A*, *B*, *C*, *D* являются вершинами искомого многогранника (рис. 233). Действительно, каждый из отрезков *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *CD*, *DB* является диагональю одной из граней куба, а поэтому все эти отрезки равны друг другу. Получается, что в треугольной пирамиде *ABCD* все грани являются правильными треугольниками. Такая пирамида называется *правильным тетраэдром*. Тетраэдр имеет 4 грани, 6 ребер и 4 вершины.

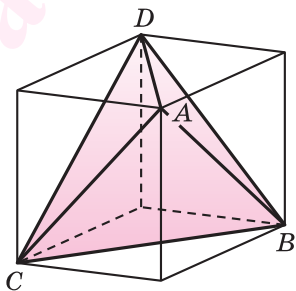


Рис. 233

Построение многогранника, в каждой вершине которого сходится по четыре треугольные грани, может быть таким. Построить куб и найти центры шести его граней (рис. 234). Эти точки являются вершинами многогранника, все грани которого

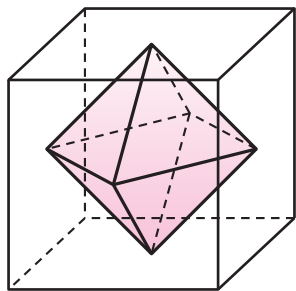


Рис. 234

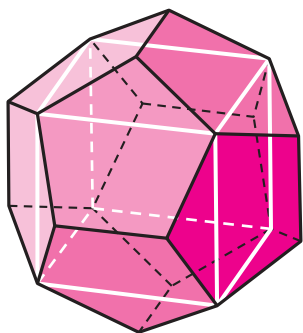


Рис. 235

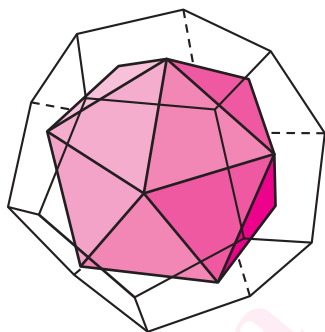


Рис. 236

го — правильные треугольники. Такой многогранник называется *правильным октаэдром*. Октаэдр имеет 8 граней, 12 ребер и 6 вершин.

Построение многогранника, в каждой вершине которого сходится по три пятиугольные грани, можно выполнить, снова используя куб. Если через каждое из двенадцати ребер куба провести плоскость, которая не имеет с поверхностью куба других общих точек, кроме точек этого ребра, то полученные 12 плоскостей при пересечении дадут грани некоторого многогранника. Можно так подобрать наклон этих плоскостей к граням куба, что грани этого двенадцатигранника будут правильными пятиугольниками (рис. 235). Такой многогранник называется *правильным додекаэдром*. Додекаэдр имеет 12 граней, 30 ребер и 20 вершин.

Наконец, многогранник, в каждой вершине которого сходится по пять треугольных граней, можно построить, используя додекаэдр: центры граней додекаэдра являются вершинами искомого правильного многогранника (рис. 236). Такой многогранник называется *правильным икосаэдром*. Икосаэдр имеет 20 граней, 30 ребер и 12 вершин.

Таким образом, есть пять типов правильных многогранников. ▲

Названия правильных многогранников происходят из греческого языка. Термин *тетраэдр*, по-гречески тетраэдров, означает *четырёхгранник*: тетра — четыре и эдра — грань. Соответственно термины *гексаэдр*, *октаэдр*, *додекаэдр*, *икосаэдр*, по-гречески е́ξαэдров, октаэдров, δωδεкаэдров, е́κoсaэдров,

означают *шестигранник*, *восьмигранник*, *двенадцатигранник*, *двадцатигранник*: $\epsilon\xi$ — шесть, $\omicron\kappa\alpha$ — восемь, $\delta\omega\delta\epsilon\kappa\alpha$ — двенадцать, $\epsilon\kappa\omicron\sigma\iota$ — двадцать.

Мы знаем, что правильные гексаэдр и тетраэдр имеют описанный и вписанный шары. Также описанный и вписанный шары имеют октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Центры этих шаров совпадают, и эта точка является центром симметрии соответствующего правильного многогранника, кроме тетраэдра, который не имеет центра симметрии.

- ?
1. Как образуется многогранный угол?
 2. Какую точку называют вершиной, какой угол называют гранью и какой луч называют ребром многогранного угла?
 3. На какие виды разделяются многогранные углы по количеству их граней?
 4. Каким отношением связаны плоские углы многогранного угла?
 5. Какому условию удовлетворяет сумма плоских углов выпуклого многогранного угла?
 6. Какой многогранник называется правильным?
 7. Каким отношением связаны плоские углы правильного многогранника; многогранные углы правильного многогранника; ребра правильного многогранника?
 8. Какому условию удовлетворяет количество ребер, сходящихся в вершине правильного многогранника; количество сторон грани правильного многогранника?
 9. Какой правильный многогранник называется тетраэдром; гексаэдром; октаэдром; додекаэдром; икосаэдром?
 10. Сколько граней, сколько ребер, сколько вершин имеют: тетраэдр; гексаэдр; октаэдр; додекаэдр; икосаэдр?

913. Докажите, что:

- а) если все плоские углы трехгранного угла прямые, то и все двугранные углы также прямые;
- б) если два плоских угла трехгранного угла прямые, то и противоположащие им двугранные углы также прямые.

914. Трехгранный угол, плоские углы которого прямые, пересечен плоскостью. Докажите, что ортоцентр сечения является основанием перпендикуляра, проведенного из вершины угла на секущую плоскость.

915. Ребра трехгранного угла с вершиной S , плоские углы которого прямые, пересекает плоскость α в точках A , B , C . Докажите, что:

- а) площадь каждого из треугольников SAB , SAC , SBC есть среднее геометрическое площади проекции этого треугольника на плоскость α и площади треугольника ABC ;
 б) сумма квадратов площадей треугольников SAB , SAC , SBC равна квадрату площади треугольника ABC .

916. Докажите, что у трехгранного угла пересекаются по одной прямой три его:

- а) биссекторные плоскости двугранных углов;
 б) плоскости, каждая из которых проходит через биссектрису плоского угла и перпендикулярна его плоскости;
 в) плоскости, каждая из которых проходит через ребро и биссектрису противолежащего плоского угла;
 г) плоскости, каждая из которых проходит через ребро и перпендикулярна противолежащей грани.

917. Трехгранный угол пересекается параллельными плоскостями. Найдите геометрическое место:

- а) ортоцентров полученных треугольников;
 б) центроидов полученных треугольников;
 в) центров окружностей, описанных около полученных треугольников.

918. Склейте правильный:

- а) тетраэдр по его развертке, изображенной на рисунке 237;
 б) гексаэдр по его развертке, изображенной на рисунке 238;
 в) октаэдр по его развертке, изображенной на рисунке 239;

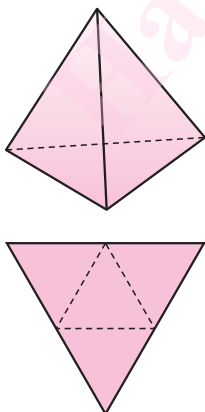


Рис. 237

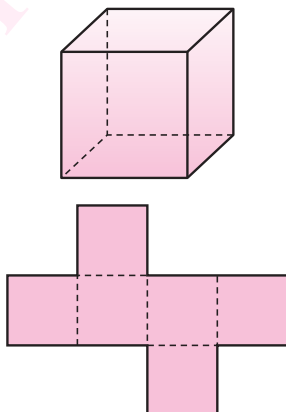


Рис. 238

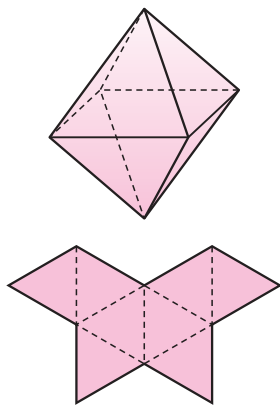


Рис. 239

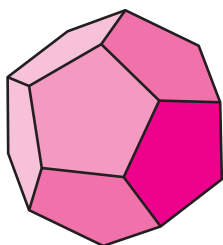


Рис. 240

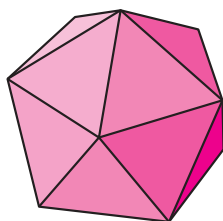
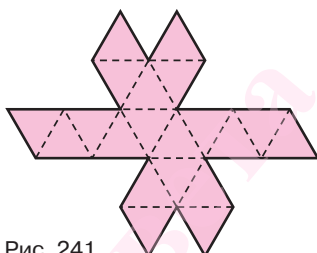
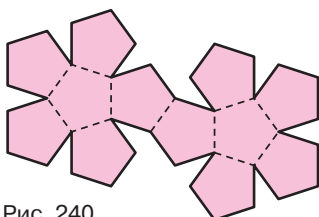


Рис. 241



- г) додекаэдр по его развертке, изображенной на рисунке 240;
 д) икосаэдр по его развертке, изображенной на рисунке 241.

919. Два одинаковых правильных тетраэдра приставлены друг к другу равными гранями. Является ли полученный многогранник правильным?

920. От каждой вершины правильного тетраэдра с ребром 2 отсекают правильный тетраэдр с ребром 1. Определите вид полученного тела.

921. Ребро куба равно a . Найдите радиус шара:

- а) вписанного в куб; б) описанного около куба.

922. Докажите, что:

- а) около куба можно описать и в него можно вписать шар;
 б) около правильного тетраэдра можно описать и в него можно вписать шар;
 в) около правильного октаэдра можно описать и в него можно вписать шар.

923. Найдите радиус шара:

- а) вписанного в правильный тетраэдр с ребром a ;
 б) описанного около правильного тетраэдра с ребром a ;
 в) вписанного в правильный октаэдр с ребром a ;
 г) описанного около правильного октаэдра с ребром a .

924. Радиус шара равен R . Найдите полную поверхность описанного около шара многогранника, учитывая, что это:

- а) куб;
- б) правильный октаэдр;
- в) правильный тетраэдр.

925. Укажите, сколько центров симметрии имеет:

- а) отрезок;
- б) параллелепипед;
- в) пара пересекающихся плоскостей;
- г) правильная треугольная призма;
- д) шестиугольная призма;
- е) куб;
- ж) правильный тетраэдр;
- з) правильный октаэдр;
- и) правильный додекаэдр;
- к) правильный икосаэдр.

926. Укажите, сколько осей симметрии имеет:

- а) отрезок;
- б) правильный треугольник;
- в) правильный шестиугольник;
- г) куб;
- д) правильный тетраэдр;
- е) правильный октаэдр.

927. Укажите, сколько плоскостей симметрии имеет:

- а) четырехугольная призма;
- б) правильная шестиугольная призма;
- в) треугольная пирамида;
- г) правильный тетраэдр;
- д) куб;
- е) правильный октаэдр;
- ж) правильный додекаэдр;
- з) правильный икосаэдр.

928. Найдите площадь сечения куба с ребром a , проходящего через диагонали двух его граней. Рассмотрите все случаи.

929. Концы диагоналей D_1A , D_1C и D_1B_1 граней куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соединены отрезками. Докажите, что многогранник $D_1 A B B_1$ — правильный тетраэдр, и найдите отношение площадей поверхности куба и тетраэдра.

930. Найдите угол между ребрами правильного октаэдра, которые имеют общую вершину и не принадлежат одной грани.

931. Найдите двугранный угол:

- а) правильного тетраэдра; б) правильного октаэдра.

932. Ребро правильного тетраэдра $PQUV$ равно q . Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, которая проходит через центр грани QUV и:

- а) параллельна грани UPV ; б) перпендикулярна ребру QP .

933. Докажите, что равны друг другу отрезки, соединяющие центры граней правильного тетраэдра.

934. В правильном тетраэдре h — высота, l — ребро, а k — расстояние между центрами граней. Выразите:

- а) l через h ; б) k через l .

935. Ребро правильного октаэдра равно a . Найдите расстояние между:

- а) двумя его противоположными вершинами;
б) центрами двух смежных граней;
в) противоположными гранями.

936. Докажите, что центры граней правильного:

- а) октаэдра являются вершинами куба;
б) тетраэдра являются вершинами другого правильного тетраэдра;
в) куба являются вершинами правильного октаэдра;
г) додекаэдра являются вершинами правильного икосаэдра;
д) икосаэдра являются вершинами правильного додекаэдра.

937. Докажите, что двугранный угол правильного тетраэдра вместе с двугранным углом правильного октаэдра составляет 180° .

938. Вершины грани правильного тетраэдра соединены с серединой проведенной к ней высоты. Докажите, что полученные отрезки попарно перпендикулярны.

939. Докажите, что в правильном октаэдре:

- а) противоположные ребра параллельны;
б) противоположные грани параллельны;
в) расстояния между противоположными гранями равны;
г) периметр сечения, параллельного грани, — величина постоянная.

940. Ребро правильного октаэдра равно a . Найдите расстояние между центрами двух его граней. Рассмотрите все возможные случаи.

941. В цилиндр, высота которого равна h , вписан такой октаэдр, что две его вершины являются центрами оснований цилиндра. Определите, при каких условиях октаэдр будет правильным, и найдите его ребро.

942. Докажите, что для любого выпуклого многогранника сумма количества граней и вершин на 2 больше количества ребер (теорема Эйлера).

943. Найдите сумму всех целых чисел из области определения функции:

а) $y = \sqrt[6]{6 - |2x + 3|}$; в) $y = \sqrt[4]{8 - |14 + 5x|}$;

б) $y = \sqrt[8]{10 - |7 - 6x|}$; г) $y = \sqrt[6]{9 - |4x + 13|}$.

944. Найдите наибольшее целое значение функции:

а) $y = \frac{7}{3} \sqrt{4 \cos^2 x + 4 \cos x + 8}$; в) $y = \frac{7}{2} \sqrt{(\cos x + \sin x)^2 + 1}$;

б) $y = \frac{1}{3} \sqrt{36 \sin^2 x - 12 \sin x + 17}$; г) $y = \frac{8}{5} \sqrt{\sin^2 x + \cos 2x + 7}$.

945. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = \log_{0,5} (2 - x^2)$; в) $y = -\log_2 (8 - x^2)$;

б) $y = \log_{0,5} (4 - x^2)$; г) $y = -\log_3 (9 - x^2)$.

946. Найдите наибольшее значение функции на указанном промежутке:

а) $y = 2 - \log_8 2^{-x}$, $[-3; 6]$; в) $y = 2 + \log_8 4^{-x}$, $[-3; 5]$;

б) $y = 3 - \log_{25} 5^{-x}$, $[-1; 5]$; г) $y = 2 - \log_9 3^{-x}$, $[-3; 6]$.

947. Найдите сумму:

а) пятого, двенадцатого и двадцатого членов арифметической прогрессии, учитывая, что седьмой ее член равен 19, а сумма первых девятнадцати членов — 475;

б) первых шестнадцати членов арифметической прогрессии, учитывая, что ее третий член равен 25, а десятый — 4.

948. Второй член арифметической прогрессии равен -7 , а разность между пятым и восьмым членами равна -9 . Определите, какой номер имеет член этой прогрессии, равный 8 .

949. Длины сторон треугольника образуют геометрическую прогрессию. Определите, в каких границах находится знаменатель этой прогрессии.

950. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12 , а сумма квадратов ее членов равна 48 . Найдите сумму первых десяти членов данной прогрессии.

951. Знаменатель геометрической прогрессии равен $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Докажите, что каждый член этой прогрессии, начиная со второго, равен разности двух соседних с ним членов.

* * *

952. Точка Q прямоугольного треугольника ABC выбрана так, что $QA^2 + QB^2 = QC^2$. Найдите угол AQB .

953. Есть квадратный трехчлен с целыми коэффициентами. Найдите наименьшее из тех натуральных значений его дискриминанта D , которые не являются точными квадратами.

954. Решите уравнение $(x+1)(4x+3)(8x+7)^2 = 4,5$.

955. Докажите, что если a, b, c, d — положительные числа, то неравенства

$$\begin{aligned}a + b &< c + d, \\(a + b)(c + d) &< ab + cd, \\(a + b)cd &< ab(c + d)\end{aligned}$$

не могут выполняться одновременно.

Повторение курса математики

19. Числа и вычисления

Школьная математика начинается с арифметики, в которой изучаются числа, действия над числами, отношения между ними, числовые выражения.

Основой арифметики являются *натуральные числа*, с помощью которых определяется *количество предметов* того или иного множества: 1, 2, 3, Все натуральные числа вместе составляют *множество натуральных чисел*, которое обозначают N .

Во множестве натуральных чисел всегда выполнимы действия *сложения* и *умножения*, а действие *вычитания*, с помощью которого находят неизвестное слагаемое по известным сумме и одному из слагаемых, во множестве натуральных чисел выполнимо не всегда. Если к натуральным числам присоединить противоположные им числа $-1, -2, -3, \dots$ и число 0 , то образуется *множество целых чисел*, которое обозначают Z .

Во множестве целых чисел всегда выполнимы действия *сложения*, *вычитания* и *умножения*, а действие *деления*, с помощью которого находят неизвестный множитель по известным произведению и одному из множителей, во множестве целых чисел остается не всегда выполнимым.

Если есть такое целое число c , что верно равенство $a = b \cdot c$, то говорят, что целое число a *делится* на целое число b , или, иначе, число a *кратно* числу b , или что число b является *делителем* числа a . Натуральное число, имеющее точно два различных натуральных делителя, называется *простым числом*, а число, имеющее более двух различных натуральных делителей, называется *составным числом*. Число 1 не является простым и не является составным. Каждое натуральное число однозначно представляется произведением простых множителей, если не учитывать порядок их записи.

Число, которое делится на 2, называется *четным числом*, а которое не делится, — *нечетным числом*. Цифры 0, 2, 4, 6, 8 называются *четными*, а цифры 1, 3, 5, 7, 9 — *нечетными*.

Число n	Свойство числа, делящегося на n	Признак делимости числа на n
2	Если число делится на 2, то оно оканчивается четной цифрой	Число делится на 2, если оно оканчивается четной цифрой
5	Если число делится на 5, то оно оканчивается цифрой 0 или цифрой 5	Число делится на 5, если оно оканчивается цифрой 0 или цифрой 5
3	Если число делится на 3, то сумма его цифр делится на 3	Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3
9	Если число делится на 9, то сумма его цифр делится на 9	Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9

Наибольшее из чисел, на которые делятся данные числа, называется *наибольшим общим делителем* (НОД) этих чисел. Например, $\text{НОД}(2^3 \cdot 3 \cdot 5, 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7) = 2^2 \cdot 5$.

Наименьшее из чисел, которые делятся на все данные числа, называется *наименьшим общим кратным* (НОК) этих чисел. Например, $\text{НОК}(2^3 \cdot 3 \cdot 5, 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ обозначают $n!$ и называют *факториалом* числа n .

Числа, являющиеся корнями уравнений вида $nx = t$, где t — целое число, а n — натуральное число, вместе составляют *множество рациональных чисел*, которое обозначают $\mathbb{Q}$. Во множестве рациональных чисел всегда выполнимы действия сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на 0).

Каждое рациональное число можно единственным образом представить обыкновенной несократимой дробью $\frac{m}{n}$ с целым числителем m и натуральным знаменателем n . Рациональные числа можно представлять и десятичными дробями, конечными или бесконечными периодическими. Если не использо-

вать бесконечные десятичные дроби с периодом 9, то такое представление также единственное.

Обыкновенную дробь можно преобразовать в десятичную делением числителя на знаменатель. При этом полученная десятичная дробь будет конечной или бесконечной периодической без предпериода или с предпериодом:

$$\frac{3}{40} = 0,075; \quad \frac{31}{37} = 0,(837); \quad \frac{201}{74} = 2,7(162).$$

Чтобы конечную десятичную дробь преобразовать в обыкновенную, можно записать дробь с числителем, равным дробной части десятичной дроби, и знаменателем, равным разрядной единице со столькими нулями, сколько есть цифр в дробной части десятичной дроби, и затем сократить полученную обыкновенную дробь:

$$0,075 = \frac{75}{1000} = \frac{3}{40}.$$

Чтобы бесконечную периодическую десятичную дробь без предпериода преобразовать в обыкновенную дробь, можно записать обыкновенную дробь, числитель которой равен периоду, а знаменатель — числу, записанному столькими девятками, сколько есть цифр в периоде, и затем сократить полученную обыкновенную дробь:

$$0,(837) = \frac{837}{999} = \frac{93}{111} = \frac{31}{37}.$$

Чтобы бесконечную периодическую десятичную дробь с предпериодом преобразовать в обыкновенную дробь, можно записать обыкновенную дробь, числитель которой равен разности между числом, записанным цифрами от десятичной запятой до конца первого периода, и числом, записанным цифрами предпериода, а знаменатель — числу, записанному столькими девятками, сколько есть цифр в периоде, и столькими нулями, сколько есть цифр в предпериоде:

$$2,7(162) = 2 + \frac{7162 - 7}{9990} = 2 \frac{7155}{9990} = 2 \frac{53}{74}.$$

Некоторые часто используемые дроби-доли имеют специальные названия. Сотая доля называется *процентом*, а тысячная — *промилле*. Процент обозначают знаком %, а промилле — знаком ‰:

$$1 \% = \frac{1}{100} = 0,01;$$

$$47 \% = \frac{47}{100} = 0,47;$$

$$1 \text{ ‰} = \frac{1}{1000} = 0,001;$$

$$47 \text{ ‰} = \frac{47}{1000} = 0,047.$$

Числа, представимые десятичными дробями, конечными или бесконечными, вместе составляют множество действительных чисел, которое обозначают ***R***. Между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой существует взаимно однозначное соответствие. При этом расстояние от числа *a* до начала координат называется *модулем числа a*. Полезно знать, что выражение $|a - b|$ представляет расстояние между числами *a* и *b* на координатной прямой.

Действительное число, не являющееся рациональным, называется *иррациональным*. Результаты действий извлечения корня, логарифмирования, нахождения значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса, арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса, за редким исключением, являются иррациональными числами:

$$\sqrt{5} = 2,236\ 0679\ 774...; \quad 5^{\frac{2}{3}} = 2,924\ 017\ 738...;$$

$$\log_7 25 = 1,654\ 174\ 95...; \quad \lg 25 = 1,397\ 940\ 008...;$$

$$\sin 2^\circ = 0,034\ 899\ 496...; \quad \operatorname{tg} 89^\circ = 57,289\ 961\ 630...;$$

$$\arccos \frac{7}{9} = 0,679\ 673\ 818...; \quad \operatorname{arcctg} 89 = 0,011\ 235\ 482... .$$

Иррациональными являются и известные вам числа π и *e*:

$$\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279...;$$

$$e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 352... .$$

*Корнем $\sqrt[n]{a}$ степени *n* из числа *a* называется такое число *x*, что $x^n = a$. Вместо $\sqrt[n]{a}$ пишут еще $a^{\frac{1}{n}}$. Вообще степень числа вводится следующим определением:*

$$a^0 = 1, \text{ если } a \neq 0;$$

$$a^1 = a;$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}} \text{ если } n \text{ — натуральное число и } n > 1;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ если } a \neq 0, n \text{ — натуральное число};$$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, если $a > 0$, m — целое число, а n — натуральное число;

$a^{\frac{m}{n}} = 0$, если $a = 0$ и $\frac{m}{n}$ — положительное рациональное число;

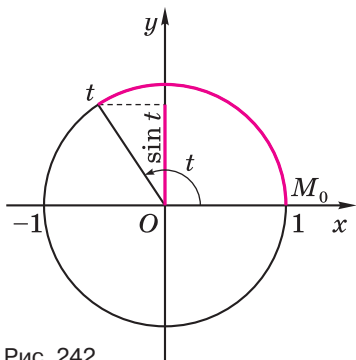


Рис. 242

если α — иррациональное число, то a^α — такое действительное число, которое находится между числами a^p и a^q , где p и q — произвольные рациональные приближения к числу α по недостатку и по избытку.

Логарифмом числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель c степени, в которую нужно возвести основание a , чтобы получить число b :

$$\log_a b = c \stackrel{\text{онр}}{\equiv} a^c = b.$$

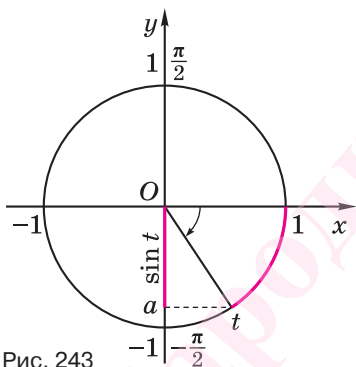


Рис. 243

Синусом числа t называется ордината y точки $M_t(x; y)$, полученной поворотом точки $M_0(1; 0)$ вокруг начала координат на угол с радианной мерой t (рис. 242).

Арксинусом числа a называется такое число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a (рис. 243):

$$\arcsin a = t \stackrel{\text{онр}}{\equiv} -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{и } \sin t = a.$$

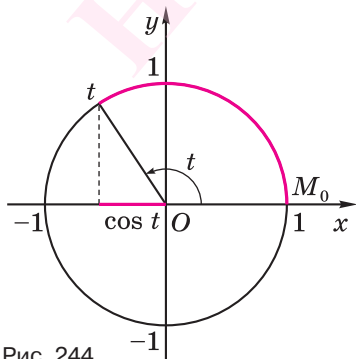


Рис. 244

Косинусом числа t называется абсцисса x точки $M_t(x; y)$, полученной поворотом точки $M_0(1; 0)$ вокруг начала координат на угол с радианной мерой t (рис. 244).

Арккосинусом числа a называется такое число из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a (рис. 245):

$$\arccos a = t \equiv \overset{\text{опр}}{0} \leq t \leq \pi$$

$$\text{и } \cos t = a.$$

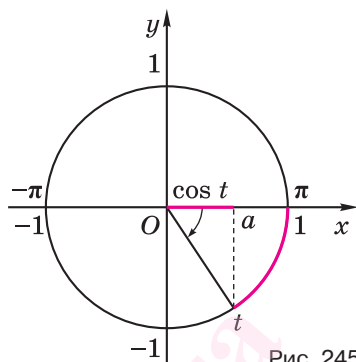


Рис. 245

Тангенсом числа t называется отношение синуса этого числа к его косинусу.

Арктангенсом числа a называется такое число из промежутка $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, тангенс которого равен a :

$$\arctg a = t \equiv \overset{\text{опр}}{-\frac{\pi}{2}} < t < \frac{\pi}{2} \text{ и } \operatorname{tg} t = a.$$

Котангенсом числа t называется отношение косинуса этого числа к его синусу.

Арккотангенсом числа a называется такое число из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a :

$$\operatorname{arccotg} a = t \equiv \overset{\text{опр}}{0} < t < \pi \text{ и } \operatorname{ctg} t = a.$$

Средним арифметическим $\bar{a}$ чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ называется их сумма, разделенная на их количество n :

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Средним геометрическим g n положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ называется корень n -й степени из их произведения:

$$g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Среднее арифметическое $\bar{a}$ и среднее геометрическое g одних и тех же чисел связаны неравенством $g \leq \bar{a}$.



1. Какие действия можно всегда выполнить во множестве натуральных чисел; во множестве целых чисел; во множестве рациональных чисел?
2. Как найти НОД нескольких натуральных чисел; НОК нескольких натуральных чисел?
3. Как перейти от представления рационального числа обыкновенной дробью к его представлению десятичной дробью?
4. По какому правилу переходят от записи рационального числа десятичной дробью к его записи обыкновенной дробью?
5. Какое число называется иррациональным; действительным? Приведите соответствующие примеры.

6. Какое число называется корнем степени n из данного числа?
7. Как определяется степень числа?
8. Какое число называется логарифмом данного числа по данному основанию?
9. Какое число называется синусом, косинусом, тангенсом, котангенсом данного числа?
10. Какое число называется арксинусом, арккосинусом, арктангенсом, арккотангенсом данного числа?
11. Какое число называется средним арифметическим нескольких чисел; средним геометрическим нескольких чисел?

956. Определите, является ли натуральным число:

- а) $0,5^{-2} - 5 \cdot (-2)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; в) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$;
 б) $\left(\left(\frac{2^3}{5}\right)^{-1} - 3 \cdot (-2)^3 + \left(\frac{7}{8}\right)^0\right)^{-1}$; г) $\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$.

957. Разложите на простые множители число:

- а) 504; б) 1404; в) 899; г) 3168.

958. Докажите, что натуральное число делится на 4 (на 25) тогда и только тогда, когда число, записанное двумя его последними цифрами, делится на 4 (на 25).

959. Из чисел 1402, 1404, 1420, 1425, 1435, 1440, 1446, 1448, 1455 выпишите числа, делящиеся на:

- а) 2; в) 4; д) 6; ж) 9; и) 15;
 б) 3; г) 5; е) 8; з) 10; к) 40.

960. В числе $327x2y$ переменные x и y обозначают некоторые цифры. Найдите наибольшее значение суммы $x + y$, учитывая, что число делится на:

- а) 45; б) 18; в) 15; г) 40; д) 75; е) 36.

961. Найдите НОД и НОК чисел:

- а) 1404 и 5544; в) 198, 504 и 780;
 б) 2021 и 3139; г) 204, 255 и 3570.

962. Найдите:

- а) наименьшее и большее единицы натуральное число, которое при делении на 24, 45 и 56 дает в остатке 1;
- б) наименьшее натуральное число, которое делится на 7 и при делении на 3, 4 и 5 дает в остатке 1;
- в) двузначное число, при делении которого на сумму цифр в частном получается 2 и в остатке 7.

963. В начало и в конец числа 23 допишите по одной цифре, чтобы полученное четырехзначное число делилось на 9 и на 11.

964. Докажите, что квадрат нечетного числа при делении на 8 дает в остатке 1.

965. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \text{НОД}(m, n) = 5, \\ \text{НОК}(m, n) = 105. \end{cases}$$

966. Докажите, что при любых натуральных значениях переменных n и m число $\sqrt[n]{m}$ является или натуральным, или иррациональным.

967. Найдите все целые значения переменной n , при которых дробь $\frac{4n+3}{5n+7}$ сократима.

968. Запишите десятичной дробью число:

а) $\frac{38}{111}$; б) $\frac{33}{140}$; в) $\frac{1}{195}$; г) $\frac{151}{1443}$.

969. Запишите обыкновенной дробью число:

а) 0,(36); в) 2,(481); д) 0,(12);
б) 0,3(27); г) 3,0(142857); е) 29,1(51).

970. Докажите, что между любыми двумя различными рациональными числами найдутся как рациональные, так и иррациональные числа.

971. Докажите иррациональность числа:

а) $\sqrt{5}$; в) $3 + \sqrt{5}$; д) $\frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt{2}}$;
б) $\sqrt[5]{3}$; г) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$; е) $\log_2 3$.

972. Сравните числа:

а) 2^{300} и 3^{200} ; в) $\sqrt{2007} + \sqrt{2010}$ и $\sqrt{2008} + \sqrt{2009}$;
б) $\sqrt{51}$ и $3 + \sqrt{17}$; г) $\sqrt[3]{51}$ и $2 + \sqrt[3]{5}$.

973. Найдите:

- а) количество чисел, меньших миллиона, которые можно записать с помощью цифр 7 и 8;
 б) сумму всех трехзначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5;
 в) сколькими способами можно так записать n единиц и m нулей, чтобы никакие два нуля не стояли рядом.

974. Найдите значение выражения:

- а) $22 \cdot 3 : 6 \cdot 11 + \left(1\frac{3}{25} + 2,88\right) \cdot 0,125 - (3,5 - 6,2) : 1,8$;
 б) $(5,2 - 4,5) : 70 + \left(4\frac{1}{8} - \frac{1}{25} \cdot 30\right) : 29\frac{1}{4} + \left(5\frac{1}{5} - 4\frac{1}{2}\right) : 14$;
 в) $\left(0,7 - \frac{1}{12}\right) \cdot 6 \cdot \left(2 \cdot \left(32\frac{17}{42} - 1\frac{6}{35}\right) + 4,2\right) - 11$;
 г) $\left(3\frac{1}{2} - 2,2 - 4\frac{1}{2} : 7,5\right) : \left(1\frac{3}{25} + 7 - 1,12\right) + 3,2$;
 д) $14,4 : \left(10\frac{1}{12} + 2,15 - 8\frac{19}{30}\right) - \left(12 : 6\frac{2}{13}\right) \cdot \left(4\frac{4}{15} : 4\right) - 1,1$;
 е) $\left(10\frac{1}{3} : \left(6\frac{1}{12} - 5\frac{2}{9}\right)\right) : (4,16 : 20,8 + 0,5 \cdot 2) + 4,4$.

975. Найдите значение выражения:

- а) $\frac{7 \cdot \left(15 : \frac{75}{4} + 2,3\right)}{0,16 \cdot 0,625 + 6,9}$; г) $\frac{1\frac{5}{31} \cdot \left(2\frac{11}{18} - 5\frac{5}{8}\right)}{49 \cdot \left(\frac{3}{7} - \frac{29}{35}\right)}$;
 б) $\frac{\left(\frac{8}{5} - 0,85\right) : 0,025}{\left(\frac{33}{20} - 1,5\right) : 1,5}$; д) $\frac{\left(5,4 + 2\frac{17}{20}\right) : 1,5}{\frac{21}{40} : 1,05 + 2\frac{1}{3} : \frac{259}{37}}$;
 в) $\frac{0,125 \cdot \left(\frac{13}{21} - \frac{95}{63}\right) \cdot 18}{0,004 - 0,2 \cdot 1,01}$; е) $\frac{\left(2\frac{4}{27} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}\right) \cdot 0,3}{\left(2\frac{5}{18} - \frac{17}{36}\right) \cdot \frac{1}{65} + 0,25}$.

976. Решите уравнение:

- а) $\frac{\left(1\frac{11}{25} + 0,56\right) \cdot 9}{5a} = \frac{\frac{4}{25} - 0,25 : \frac{5}{6}}{13\frac{7}{9} - 16,5}$;

$$\text{б)} \frac{\frac{2}{15} + 7,7 : 24\frac{3}{4}}{\frac{5}{72} - \frac{17}{18} \cdot \frac{1}{34}} = \frac{b}{\left(1\frac{22}{25} + 2,12\right) \cdot \frac{3}{16}};$$

$$\text{в)} \frac{2\frac{1}{2} - 8\frac{5}{6} \cdot 0,2}{7y} = \frac{\left(7,5 - 6\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{3}}{\left(7,5 + 4\frac{3}{4}\right) : 0,5};$$

$$\text{г)} \frac{\left(\frac{2}{5} - 0,15\right) \cdot 0,8}{\left(1\frac{1}{3} \cdot 1,2 + 2\frac{2}{3}\right) \cdot 0,375} = \frac{0,22 \cdot 4\frac{6}{11} - \frac{24}{25}}{z}.$$

977. Разделите число:

а) 60 прямо пропорционально числам $\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$ и 8;

б) 74,8 прямо пропорционально числам $\frac{1}{7}$, 6 и $11\frac{2}{3}$;

в) 1200 прямо пропорционально числам 2, 3, $3\frac{4}{5}$ и $11\frac{1}{5}$;

г) 92,5 прямо пропорционально числам $\frac{1}{3}$, 5 и 7;

д) 405 прямо пропорционально числам $\frac{2}{3}$, $1\frac{2}{3}$ и 6.

978. Найдите значение выражения:

$$\text{а)} \left(\left(\frac{1}{6}\right)^0 - 12 \cdot 3^{-3}\right) \cdot 18 \cdot \left(8 - 6 \cdot \left(\frac{5}{18}\right)^0\right)^{-2};$$

$$\text{б)} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{4}{3}\right)^{-1}\right)^{-1} \cdot 3 - \left(\frac{4}{5}\right)^0 - (0,1)^{-1};$$

$$\text{в)} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 5 \cdot 2^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right) : (3^0 + 0,5^{-1});$$

$$\text{г)} \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 4^{-2}\right) : \left(\left(\frac{5}{6}\right)^0 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right).$$

979. Найдите значение выражения:

$$\text{а)} \frac{\sqrt[3]{\frac{12}{25} \sqrt{15(38^2 - 23^2)}}}{\sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{7}} \sqrt{\frac{36^2 - 27^2}{2}}}};$$

$$\text{б)} \frac{\sqrt[3]{29 + \sqrt{(27^2 - 22^2) \cdot 5}}}{\sqrt{2 + \sqrt{\frac{68(32^2 - 15^2)}{47}}}};$$

$$\text{в)} \frac{\frac{\left(10^{\frac{1}{3}} - 7^{\frac{1}{3}}\right)(\sqrt[3]{100} + \sqrt[3]{70} + \sqrt[3]{49})}{(3\sqrt{16} - 3\sqrt{6})^2 \left(\frac{\sqrt{16}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}}{\frac{\left(5^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right)(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})}{0,25}};$$

$$\text{г)} \frac{\frac{(\sqrt{14} - \sqrt{6})^3 \left(14^{\frac{1}{2}} + 6^{\frac{1}{2}}\right)^3}{\left(5^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)(16 \cdot \sqrt[3]{25} - 16 \cdot \sqrt[3]{15} + 16 \cdot \sqrt[3]{9})}}{\frac{\left(7^{\frac{1}{2}} - 6^{\frac{1}{2}}\right)^3 (\sqrt{7} + \sqrt{6})^3}{0,125}}.$$

980. Найдите значение выражения:

$$\text{а)} \frac{\frac{(4\sqrt{7} + 4 \cdot 2^{\frac{1}{2}})^2}{18 + 2 \cdot 5 \cdot 6^{\frac{1}{2}}}}{\frac{(12^{\frac{1}{2}} - \sqrt{8}) \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{(36^{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{6})\left(2 + \frac{2}{9}\right)}};$$

$$\text{б)} \frac{\frac{\left(54^{\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{81}\right)\left(18^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\right)^2}{5 \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 5 \cdot \sqrt[3]{3}}}{\frac{\left(\sqrt[3]{5} - 9^{\frac{1}{3}}\right)\left(32^{\frac{1}{2}} - \sqrt{8}\right)^2}{\sqrt[3]{40} - 72^{\frac{1}{3}}}};$$

$$\text{в)} \frac{\left(8^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\right)^2 \left(4^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{2}\right)}{32^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{16}};$$

$$\text{г)} \frac{(\sqrt{17} - 2)(\sqrt{34} + \sqrt{8} + \sqrt{17} + 2)}{\frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{14} + 1)(7\sqrt{2} - \sqrt{7} + 2\sqrt{14} - 2)}};$$

$$\text{д)} \frac{\frac{(\sqrt{15} + \sqrt{3})(\sqrt{60} - \sqrt{12} - \sqrt{45} + 3)}{2 - \sqrt{3}}}{\frac{(\sqrt{19} + \sqrt{2})(\sqrt{38} + \sqrt{57} - \sqrt{6} - 2)}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}};$$

$$\text{е)} \frac{\frac{(\sqrt{40} - 2)(\sqrt{130} + \sqrt{13} + 5\sqrt{10} + 5)}{\sqrt{13} + 5}}{\frac{(2\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{24} + 3 + \sqrt{16} + \sqrt{6})}{\sqrt{12} + 2\sqrt{2}}}.$$

981. Определите, является ли натуральным число:

а) $\log_2 16$;	д) $\log_3 81$;	и) $\log_2 \sqrt{2}$;
б) $\log_2 \frac{1}{2}$;	е) $\log_2 64$;	к) $\log_3 3$;
в) $\log_3 27$;	ж) $\log_2 \frac{1}{8}$;	л) $\log_{0,5} \frac{1}{\sqrt{32}}$;
г) $\log_3 \frac{1}{9}$;	з) $\log_2 2$;	м) $\log_8 128$.

982. Определите, является ли целым число:

- а) $\log_3 \frac{1}{3}$; в) $\log_3 \log_2 8$; д) $\log_{27} \log_{10} 1000$;
б) $\log_2 \log_3 81$; г) $\frac{1}{3} \log_9 \log_2 8$; е) $3 \log_2 \log_4 16 + \log_{\frac{1}{2}} 2$.

983. Сравните числа:

- а) $\log_2 \sqrt[4]{2}$ и $\log_3 \sqrt[4]{3}$; в) $\log_3 \frac{1}{3\sqrt{3}}$ и $\log_2 \frac{1}{4}$;
б) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ и $\log_3 1$; г) $\log_7 \frac{\sqrt[3]{7}}{49}$ и $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{27}$.

984. Найдите значение выражения:

- а) $\log_3 \frac{1}{27} : \log_4 \frac{1}{32} + \log_2 0,25 : \log_{36} 6 - \log_{\sqrt{6}} \frac{1}{6}$;
б) $\log_{\frac{1}{9}} 3 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 3 \sqrt{3} : (\log_{27} 729 \cdot \log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{4} : \log_3^2 9)$;
в) $\sqrt{\log_3 81} \cdot \sqrt{\lg 10\,000} + \sqrt[3]{\log_2 256} : \log_{\frac{3}{32}} 4 : \log_2^3 8$;
г) $\log_{0,5}^2 4 \cdot \log_{25} 125 - \log_3^4 \frac{1}{9} \cdot \log_{\frac{1}{3}}^2 \frac{1}{27} : \sqrt{-2 \log_3 \frac{1}{9}}$.

985. Найдите значение выражения:

- а) $\log_{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} + \log_9 \log_4 (\sqrt[3]{4})$;
б) $\log_{16}^3 \log_3 81 : \log_{\frac{3}{2}} \log_{25} 125$;
в) $\log_{\frac{1}{4}} \log_2 4 - 0,8 (1 + 9^{\log_3 8})^{\log_{65} 5}$;
г) $49^{1 - \log_7 14} + 5^{-\log_5 4} \cdot \frac{3}{7} (\log_2 16 + 27^{\log_3 2})^{\log_{12} 49}$;
д) $\log_{\frac{16}{9}} \log_{27} 81 : \log_{\frac{1}{2}} \log_2 4$;
е) $\log_{\frac{1}{9}} \log_2 8 \cdot \log_2 \log_3 (\sqrt[4]{3})$;
ж) $32^{\log_4 3 - 0,1 \log_2 3} + 10^{2 - \lg 2} - 25^{\log_5 4}$;
з) $81^{\frac{2 - \log_{\frac{1}{2}} 3 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 4}{2}} : \left(2 + (\sqrt{3})^{\log_3 (\frac{1}{16})} \right)^{\log_{\frac{9}{4}} 3}$.

986. Найдите значение выражения:

- а) $\log_4 \sin \frac{\pi}{4}$; в) $\log_8 \sin 150^\circ$;
б) $\log_{10} \operatorname{tg} \frac{1}{3}$; г) $\log_2 \cos 60^\circ$.

987. Найдите:

- а) стороны AB и BC треугольника ABC , учитывая, что $AC = 21$ см, $\operatorname{ctg} A = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} C = 1\frac{7}{8}$;
- б) косинусы углов B и C треугольника ABC , учитывая, что $AB = 14$ см, $AC = 10$ см и $\cos A = \frac{1}{7}$;
- в) синус, косинус и котангенс угла C треугольника ABC , учитывая, что $AB = 34$ см, $AC = 42$ см и $\sin A = \frac{8}{17}$;
- г) синус, косинус и тангенс угла C треугольника ABC , учитывая, что его площадь равна 84 см², $AC - AB = 11$ см и $\sin A = 0,8$.

988. Найдите значение выражения:

- а) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos \frac{1}{2}$;
- б) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
- в) $\frac{\arcsin 0}{\arcsin(-1)} - \frac{\arcsin 1}{\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)}$; е) $\frac{\arccos 0}{\arccos(-1)} + \frac{\arccos 1}{\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)}$.

989. Найдите значение выражения:

- а) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
- б) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
- в) $\frac{\operatorname{arctg} 0 (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1))}{\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})}$;
- г) $\frac{\operatorname{arctg} 0 (\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}(-1))}{\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})}$.

990. Сравните числа:

- а) $\arcsin 0,6$ и 2 ; д) $\arcsin \left(\sin \frac{21\pi}{5}\right)$ и $\frac{\pi}{4}$;
- б) $\arccos(-0,2)$ и 1 ; е) $\arccos \left(\cos \frac{23\pi}{7}\right)$ и $\frac{4\pi}{7}$;
- в) $\operatorname{arctg}(-3)$ и 2 ; ж) $\arccos \left(\sin \frac{33\pi}{5}\right)$ и $\arcsin \left(\cos \frac{27\pi}{5}\right)$;
- г) $\operatorname{arctg}(-2)$ и $1,5$; з) $\operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{26\pi}{5}\right)$ и $\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{28\pi}{5}\right)$.

991. Найдите среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел:

- а) 25 и 49; в) 77 и 693; д) 16, 25 и 540;
б) 125 и 245; г) 637 и 2197; е) 608, 646 и 5491.

992. Найдите среднее арифметическое чисел:

- а) -29 и 97; в) -77 и 693; д) 16, -25 и 540;
б) 125 и -245; г) 637 и -2197; е) -608, -646 и 5491.

993. Три точки окружности разделяют ее на дуги, которые относятся как $3 : 4 : 5$, а треугольник касается окружности в этих точках. Найдите его площадь, учитывая, что радиус окружности равен r .

994. На стороне AB треугольника ABC выбраны такие точки M и N , что $AM : MN : NB = 1 : 2 : 3$. Через точки M и N проведены прямые, параллельные прямой AC . Найдите площадь части треугольника, расположенной между проведенными прямыми, учитывая, что площадь треугольника ABC равна S .

995. В треугольник ABC , угол A которого равен α , вписана окружность с центром Q . Найдите угол BQC .

996. Прямые, проведенные через точку A вне окружности, касаются ее в точках B и C . Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC , лежит на данной окружности.

997. Найдите сторону ромба, сумма диагоналей которого равна m , а его площадь — S .

998. В сегмент с дугой 120° и радиусом r вписан квадрат, две вершины которого находятся на дуге, а две другие — на хорде. Найдите сторону квадрата.

999. Площади треугольников, ограниченных диагоналями трапеции и ее основаниями, равны S_1 и S_2 . Найдите площадь трапеции.

1000. Вершины правильного шестиугольника со стороной a являются центрами окружностей с радиусами $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Найдите площадь части шестиугольника, находящейся вне этих окружностей.

1001. Через вершину A треугольника ABC и середину медианы BQ проведена прямая. Определите, в каком отношении она делит сторону BC .

1002. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны такие точки M и N , что $AM : MB = 2 : 3$ и $BN : NC = 6 : 5$. Определите, в каком отношении прямая AN делит отрезок CM точкой пересечения.

1003. Диагонали вписанного в окружность четырехугольника пересекаются в точке Q . Найдите $\angle ACD$, учитывая, что $\angle ABC = \alpha$, $\angle BQC = \beta$ и $\angle BAD = \gamma$.

* * *

1004. Число A делится на число B , записанное m единицами. Докажите, что сумма цифр числа A не меньше m .

1005. Определите, какое из чисел больше: 31^{11} или 17^{14} .

1006. Через точку K биссектрисы AD острого угла A прямоугольного треугольника ABC проведена под прямым углом к AD прямая, пересекающая гипотенузу AB в точке N . Докажите, что угол между прямыми DN и CK равен половине угла BAC .

20. Выражения и их преобразования

В арифметике изучают *числовые выражения*, которые образуются из чисел с помощью действий. Мы знаем действия сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня, логарифмирования, нахождения значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса, арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса. Знаем также, что на множестве действительных чисел действия сложения, вычитания, умножения, нахождения значений синуса, косинуса, арктангенса, арккотангенса всегда выполнимы, а остальные имеют определенные ограничения. Обратим внимание на то, что действие извлечения корня является частным случаем действия возведения в степень, а именно возведения в рациональную степень: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Если при образовании выражения с помощью названных действий, кроме чисел, использовать еще и переменные, то

образуются *выражения с переменными*, изучаемые в разделе математики, названном *алгеброй*.

Особенностью переменной является то, что она принимает разные значения из определенного множества. В алгебре таким множеством является множество действительных чисел. Чтобы задать *переменную*, нужно для нее выбрать имя — некоторую букву — и указать множество, из которого она принимает свои значения. Если это множество не указано, то подразумевается множество действительных чисел или та его часть, на которой данное выражение имеет значения. Например, для выражения $\frac{3}{\sqrt[4]{x-9}}$ такое множество находится из ус-

ловия $x - 9 > 0$, так как если это условие не выполнено, то данное выражение не имеет значений.

Действия, с помощью которых образуются выражения, разделяют на алгебраические и трансцендентные. К *алгебраическим действиям* относят действия сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в рациональную степень. Остальные действия, т. е. действия возведения в иррациональную степень, логарифмирования и нахождения значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса, арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса, считают *трансцендентными действиями*.

В зависимости от действий, использованных при образовании выражения, его относят к тому или иному виду, отношения между которыми показывает схема, приведенная на рисунке 246.

Если в выражение с переменными подставить вместо каждой переменной какое-либо ее значение, то получится числовое выражение, значение которого называют *значением выражения с переменными* при выбранных значениях переменных. Множество наборов значений переменных, при которых выражение с переменными имеет значения, называют *областью определения выражения*.

Два выражения называются *тождественно равными*, если при всех наборах значений переменных из области определения обоих выражений соответствующие значения выражений равны. Замена выражения тождественно равным ему выражением называется *тождественным преобразованием* этого выражения.

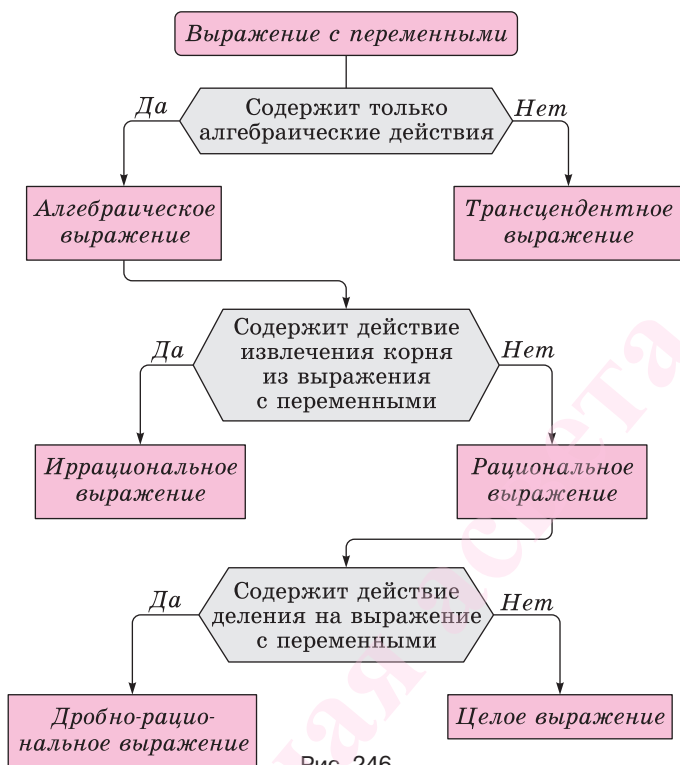


Рис. 246

При тождественных преобразованиях выражения используют свойства действий, участвующих в его образовании.

Сложение и умножение имеют переместительное и сочетательное свойства, а умножение — распределительное свойство относительно сложения:

$$\begin{aligned}
 a + b &= b + a; & a \cdot b &= b \cdot a; \\
 a + (b + c) &= (a + b) + c; & a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c; \\
 a \cdot (b + c) &= ab + ac.
 \end{aligned}$$

Распределительное свойство позволяет ввести преобразования — раскрытие скобок, вынесение общего множителя за скобки, приведение подобных слагаемых:

- *раскрытием скобок* называется замена выражений $a(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$ и $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)b$ выражениями $ab_1 + ab_2 + \dots + ab_n$ и $a_1b + a_2b + \dots + a_nb$ соответственно;
- *вынесением общего множителя за скобки* называется замена выражений $ab_1 + ab_2 + \dots + ab_n$ и $a_1b + a_2b + \dots + a_nb$ выражениями $a(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$ и $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)b$ соответственно;

• *приведением подобных слагаемых* называется замена суммы подобных слагаемых тождественно равным ей одним слагаемым.

Тождество $a - b = a + (-b)$ позволяет выражение, образованное из других выражений с помощью сложения и вычитания, записать как сумму, которая называется *алгебраической суммой*.

Свойства сложения и умножения дают возможность обосновать формулы сокращенного умножения:

$$\begin{aligned}(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2; \\ (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3; \\ (a - b)(a + b) &= a^2 - b^2; \\ (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) &= a^3 \pm b^3.\end{aligned}$$

Действие *возведения в степень* имеет такие свойства:

$$\begin{aligned}a^p a^q &= a^{p+q}; & a^p : a^q &= a^{p-q}; & (ab)^p &= a^p b^p; \\ \left(\frac{a}{b}\right)^p &= \frac{a^p}{b^p}; & \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; & (a^p)^q &= a^{p \cdot q}; \\ \sqrt[nk]{a^{mk}} &= \sqrt[n]{a^m}; & \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; & (\sqrt[n]{a})^m &= \sqrt[n]{a^m}.\end{aligned}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{если } n \text{ — нечетное натуральное число,} \\ |a|, & \text{если } n \text{ — четное натуральное число;} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}, \text{ если } n \text{ — нечетное натуральное число;}$$

$$a > b \equiv \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

Действие *логарифмирования* имеет свойства:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c; \quad \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$$

$$\log_a b^r = r \log_a b; \quad a^{\log_a b} = b; \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Свойства действий *нахождения значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса* выражают:

• формулы четности:

$$\sin(-t) = -\sin t; \quad \cos(-t) = \cos t; \quad \operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t; \quad \operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t;$$

• основные тригонометрические тождества:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

- формулы сложения:

$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v;$$

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v;$$

$$\operatorname{tg}(u \pm v) = \frac{\operatorname{tg} u \pm \operatorname{tg} v}{1 \mp \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v};$$

- формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \cos t; \quad \sin(\pi \pm t) = \mp \sin t; \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = -\cos t;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \sin t; \quad \cos(\pi \pm t) = -\cos t; \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \pm \sin t;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{ctg} t; \quad \operatorname{tg}(\pi \pm t) = \pm \operatorname{tg} t; \quad \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{ctg} t;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{tg} t; \quad \operatorname{ctg}(\pi \pm t) = \pm \operatorname{ctg} t; \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{tg} t;$$

$$\sin(2\pi \pm t) = \pm \sin t; \quad \cos(2\pi \pm t) = \cos t; \quad \operatorname{tg}(2\pi \pm t) = \pm \operatorname{tg} t.$$

$$\operatorname{ctg}(2\pi \pm t) = \pm \operatorname{ctg} t;$$

- формулы двойного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

- формулы половинного аргумента:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}; \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{\sin t}{1 + \cos t}; \quad \operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{\sin t};$$

- формулы преобразования суммы в произведение:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

- формулы преобразования произведения в сумму:

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta));$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta));$$

- формулы универсальной тригонометрической подстановки:

$$\sin 2t = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}; \quad \cos 2t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t};$$

- формула вспомогательного аргумента:

$$a \sin t + b \cos t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t + u),$$

где $\cos u = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin u = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $a \neq 0$ или $b \neq 0$.

Действия нахождения значений арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса имеют такие свойства:

$$\sin(\arcsin a) = a, \text{ если } a \in [-1; 1];$$

$$\arcsin(\sin t) = t, \text{ если } t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$\cos(\arccos a) = a, \text{ если } a \in [-1; 1];$$

$$\arccos(\cos t) = t, \text{ если } t \in [0; \pi];$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a;$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t) = t, \text{ если } t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a;$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} t) = t, \text{ если } t \in (0; \pi);$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a;$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a;$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a;$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a;$$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}.$$

Любое целое выражение представляется *многочленом стандартного вида*, т. е. суммой одночленов стандартного вида. *Одночленом стандартного вида* называют произведение числа и степеней различных переменных.

Обратное преобразование — представление многочлена стандартного вида произведением нескольких множителей — называют *разложением многочлена на множители*.

При разложении многочлена на множители используют вынесение общего множителя за скобки, группировку, формулы сокращенного умножения.

Среди целых выражений важную роль играет *квадратный трехчлен*, т. е. выражение вида $ax^2 + bx + c$, где a, b, c — некоторые числа, x — переменная, причем $a \neq 0$.

Значения переменной x , при которых квадратный трехчлен имеет своим значением число 0, называются *корнями квадратного трехчлена*.

Выражение $b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом квадратного трехчлена* и обозначают D , т. е.

$$D = b^2 - 4ac.$$

Если $D > 0$, то квадратный трехчлен имеет два корня x_1 и x_2 , которые выражаются через его коэффициенты следующим образом:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D = 0$, то квадратный трехчлен имеет один корень $x = -\frac{b}{2a}$.

Если $D < 0$, то квадратный трехчлен не имеет корней.

Связь между корнями квадратного трехчлена и его коэффициентами выражает *теорема Виета*: если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ и } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Теорема, обратная теореме Виета, указывает условия, при которых два числа являются корнями квадратного трехчлена: если числа a, b, c, x_1 и x_2 удовлетворяют условиям $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, то x_1 и x_2 являются корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Найдя корни квадратного трехчлена, его можно представить произведением линейных множителей: если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то верно равенство $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Любое рациональное выражение представляется рациональной дробью или многочленом, при этом под *рациональной дробью* понимают дробь, числитель и знаменатель которой являются многочленами стандартного вида.

- ?
1. Назовите действия, с помощью которых образуется выражение с переменными.
 2. Какие два выражения называются тождественно равными?
 3. Какое изменение выражения называют его тождественным преобразованием?
 4. Запишите свойства действий сложения и умножения.
 5. Какое тождественное преобразование называют раскрытием скобок; вынесением общего множителя за скобки; приведением подобных слагаемых?
 6. Запишите формулы квадрата суммы и разности; формулы куба суммы и разности; формулы разности квадратов; формулы суммы и разности кубов.
 7. Запишите свойства действия возведения в степень; свойства действия извлечения корня; свойства действия логарифмирования.
 8. Запишите формулы, выражающие свойства четности синуса, косинуса, тангенса, котангенса.
 9. Запишите формулы, выражающие связи между значениями синуса, косинуса, тангенса и котангенса одной переменной.
 10. Запишите тригонометрические формулы сложения.
 11. Запишите формулы приведения.
 12. Запишите формулы двойного аргумента для синуса, косинуса, тангенса; формулы половинного аргумента для синуса, косинуса, тангенса.
 13. Запишите формулы преобразования в произведение суммы синусов, суммы косинусов, разности синусов и разности косинусов.
 14. Запишите формулы преобразования в сумму произведения синусов, произведения косинусов, произведения синуса и косинуса.
 15. Запишите формулы универсальной тригонометрической подстановки; формулу вспомогательного аргумента.
 16. Запишите формулы нахождения синуса арксинуса, косинуса арккосинуса, тангенса арктангенса, котангенса арккотангенса.
 17. Запишите формулы нахождения арксинуса синуса, арккосинуса косинуса, арктангенса тангенса, арккотангенса котангенса.
 18. Запишите формулы, связывающие значения арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса от противоположных чисел.
 19. Запишите формулы, выражающие связи между значениями арксинуса и арккосинуса одной переменной, арктангенса и арккотангенса одной переменной.

20. Какое целое выражение называют квадратным трехчленом; дискриминантом квадратного трехчлена?
21. При каком условии квадратный трехчлен имеет два корня и как их найти; имеет один корень и как его найти; не имеет корней?
22. Сформулируйте теорему Виета и теорему, обратную ей.
23. Как по корням квадратного трехчлена записать его разложение на линейные множители?

1007. Определите, является ли тождеством равенство:

- | | |
|----------------------------------|----------------------------|
| а) $p + q = q + p$; | е) $ w = w$; |
| б) $(k + l) + m = k + (l + m)$; | ж) $ h^2 + 5 = h^2 + 5$; |
| в) $ cd = c \cdot d $; | з) $ g^2 - 4 = g^2 - 4$; |
| г) $ u + v = u + v $; | и) $i^2 - 7i = i(i - 7)$; |
| д) $(x - y)^2 = (y - x)^2$; | к) $3j - 4 = 4 - 3j$. |

1008. Определите, является ли тождеством равенство:

- а) $\cos x + \cos y = \cos y + \cos x$;
- б) $(\lg k + \lg l) + \lg m = \lg k + (\lg l + \lg m)$;
- в) $\arccos(3p - 4) = \arccos(4 - 3p)$;
- г) $\arcsin^2 t - 7 \arcsin t = \arcsin t (\arcsin t - 7)$;
- д) $(\operatorname{arctg} a - \operatorname{arcctg} b)^4 = (\operatorname{arctg} a - \operatorname{arcctg} b)^4$;
- е) $\cos cd = \cos(-c) \cos(-d)$;
- ж) $\operatorname{ctg} ij = \operatorname{ctg}(-i) \operatorname{ctg}(-j)$;
- з) $\lg ab = \lg(-a) \lg(-b)$;
- и) $|\sqrt[3]{r} - \sqrt[5]{s}| = |\sqrt[3]{r}| - |\sqrt[5]{s}|$;
- к) $|\sqrt[3]{u} \sqrt[5]{v}| = |\sqrt[3]{u}| \cdot |\sqrt[5]{v}|$.

1009. Докажите, что является тождеством формула:

- | | |
|--|--|
| а) $5 \log_3 a + 5 = 5(\log_3 a + 1)$; | г) $ \log_{0,99}(a^2 + 1,1) > 0$; |
| б) $6 \operatorname{arctg} x - 18 = 6(\operatorname{arctg} x - 3)$; | д) $5^s + 3 \log_a q - 5^s = 3 \log_a q$; |
| в) $5 \cdot 7^z - 3 = 2 \cdot 7^z + (3 \cdot 7^z - 3)$; | е) $ 2 - e^x \geq 0$. |

1010. Запишите многочленом стандартного вида выражение:

- а) $(2x - 5y)(x + y) - 2x^2$;
- б) $5a^2 + (4a + b)(b - a)$;
- в) $2m(6 - m) - (n + 3m)(2 - m)$;

- г) $(u + 7v)(1 - 3u) - 5u(v - u)$;
 д) $(k + 3l)(4k - 5l) - (2k - l)(l - k)$;
 е) $(6i - 4j)(3j + i) + (2i - j)(i - 2j)$.

1011. Разложите на множители выражение:

- а) $(x + 3y)^2 - z^2$; д) $(2u - 3)^2 - 81v^2$; и) $(i + j^2)^2 - 9i^2j^4$;
 б) $(4a - 3b)^2 - 16c^2$; е) $(p - q)^2 - p^2q^2$; к) $(s^2 - r)^2 - 1$;
 в) $(3p - 1)^2 - 100q^2$; ж) $(5g + 3h)^2 - 49$; л) $(2d - 7)^2 - 225$;
 г) $(m + 5n)^2 - h^2$; з) $(4e + 3h)^2 - f^4$; м) $289 - (7 + 6y^2)^2$.

1012. Разложите на множители выражение:

- а) $bc(b - c) + ac(c - a) + ab(a - b)$;
 б) $yz(y + z) + xz(z - x) - xy(x + y)$;
 в) $t(t^3 - a^3) + at(t^2 - a^2) + a^3(t - a)$;
 г) $(b - r)s^3 - (b - s)r^3 + (r - s)b^3$.

1013. Упростите выражение:

- а) $\frac{a^2 + 4a + 2}{a} - a - \frac{2}{a}$; е) $\frac{b^2 + 2b - 3}{b - 1} - b$;
 б) $\frac{m^2 - 4m + 5}{m - 1} - \frac{2}{m - 1} - m$; ж) $\frac{c + 1}{c^2 - c - 2} - \frac{1}{c - 2}$;
 в) $n - \frac{2}{3n + 1} - \frac{3n^2 - 0,5n - 2,5}{3n + 1}$; з) $\frac{6d^2 - d - 2}{3d - 2} - 2d$;
 г) $\frac{3p^2 + 12p + 13}{3p + 6} - p - \frac{1}{3(p + 2)}$; и) $\frac{3t^2 - 2t - 1}{t} - 3t + \frac{1}{t}$;
 д) $\frac{2q^2 + 11q + 14}{q + 3} - 2q + \frac{1}{q + 3}$; к) $\frac{2x^2 + 5x - 12}{2x - 3} - x + 1$.

1014. Упростите выражение:

- а) $\frac{1}{4a^2 - 4} + \frac{1}{4a^2 - 8a + 4} + \frac{1}{4a^2 + 8a + 4}$;
 б) $\frac{1}{2 + 4b + 2b^2} + \frac{1}{2 - 4b + 2b^2} - \frac{1}{1 - b^2}$;
 в) $\frac{x}{x^2 - xy} + \frac{y}{xy + y^2} - \frac{x^2 + y^2}{y^3 - x^2y}$;
 г) $\frac{m}{m - n} + \frac{4m^2n - mn^2}{n^3 - m^3} + \frac{n^2}{n^2 + mn + m^2}$.

1015. Упростите выражение:

- а) $\frac{(x^2 - b^2)^{-1} + (x^2 + b^2)^{-1}}{(x^2 - b^2)^{-1} - (x^2 + b^2)^{-1}} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b^2}{x^2}\right)^{-1};$
- б) $(h^2 z^{-3} + h^{-1}) : (h z^{-2} - z^{-1} + h^{-1}) - 1;$
- в) $\left(\frac{m^{-2}}{1 + m^{-2}} - 1\right) : (m^2 + 1)^{-1};$
- г) $\frac{k^{-6} - 64}{4 + 2k^{-1} + k^{-2}} \cdot \frac{k^2(k^{-3} + 8)^{-1}}{(4 - 4k^{-1} + k^{-2})(k^{-1} - 2)^{-1}};$
- д) $\left(\frac{t^{-2}}{1 + t^{-2}}\right) : \left(\frac{t^2 + 1}{t}\right)^{-1};$
- е) $\frac{y^{-2} + z^{-2}}{y^{-1} + z^{-1}} : \left(\frac{y + z}{yz}\right)^{-1} - z^{-2}.$

1016. Найдите значение выражения:

- а) $\frac{(\sqrt{21} - 2)\sqrt{25 + 2\sqrt{84}}}{(9 - \sqrt{83})\sqrt{18 \cdot \sqrt{83} + 164}};$
- б) $\frac{(10 - \sqrt{140})\sqrt{60 + 10\sqrt{35}}}{(4\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{50 + \sqrt{384}}};$
- в) $\frac{\sqrt{(\sqrt{97} + 4)}\sqrt{113 - 8\sqrt{97}}}{(\sqrt{33} - 2)\sqrt{37 + 2\sqrt{132}}};$
- г) $\frac{(2\sqrt{6} + \sqrt{11})\sqrt{35 - 2\sqrt{264}}}{(5 - 3\sqrt{2})\sqrt{43 + 5\sqrt{72}}};$
- д) $\frac{(\sqrt{28} - \sqrt{12})\sqrt{10 + \sqrt{84}}}{(\sqrt{3} - \sqrt{17})\sqrt{\sqrt{204} + 20}}.$

1017. Раскройте скобки и приведите подобные:

- а) $(\sqrt{p} + 2)(2 - \sqrt{p});$
- б) $(\sqrt{s} - \sqrt{6})^2;$
- в) $(3\sqrt{x} - x)^2 (3\sqrt{x} + x)^2;$
- г) $(\sqrt{z} + \sqrt{y})^2 - 10(\sqrt{z} - \sqrt{y})^2.$

1018. Найдите значение выражения:

- а) $\log_{36} 2 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{6}} 3;$
- б) $2 \log_{25} 30 + \log_{0,2} 6;$
- в) $5^{\frac{\lg 625}{\lg 25}};$
- г) $\log_{\frac{1}{4}} (\log_3 4 \cdot \log_2 3).$

1019. Найдите значение выражения:

- а) $\log_2 27 - 2 \log_2 3 + \log_2 \frac{2}{3};$
- б) $\log_2 39 - \log_2 13 - \log_2 24;$
- в) $\log_4 91 - \log_4 13 + \log_4 \frac{2}{7};$
- г) $\log_6 34 - \log_6 17 + \log_6 18;$
- д) $\log_3 21 + \log_3 2 - \log_3 14;$
- е) $\log_3 63 - \log_3 9 + \frac{1}{2} \log_3 \frac{27}{49}.$

1020. Учитывая, что:

- а) $\log_7 2 = m$, найдите $\log_{49} 28$;
- б) $\lg 3 = m$, $\lg 5 = n$, найдите $\log_{15} 30$;
- в) $\log_6 2 = m$, найдите $\log_{24} 72$;
- г) $\log_{36} 8 = m$, найдите $\log_{36} 9$.

1021. Учитывая, что:

- а) $\log_3 15 = a$ и $\log_3 10 = b$, найдите значение выражения $\log_{\sqrt{3}} 50$;
- б) $\log_2 5 = a$, найдите значение выражения $\log_4 1250$.

1022. Пропотенцируйте равенство:

- а) $\lg x = 2\lg(a + b) - 3\lg(a - b)$;
- б) $\lg x = \frac{1}{3}\lg(a - b) - \frac{1}{2}\lg(a + b)$;
- в) $\lg x = \lg(1 + \sin \alpha) + \lg(1 - \sin \alpha)$;
- г) $\lg x = -2\lg(m + n) - 3\lg(m - n)$;
- д) $\lg x = \frac{2\lg a}{3} - \frac{3\lg b}{4}$;
- е) $\lg x = \frac{3\lg m}{4} + \frac{4\lg n}{5}$;
- ж) $\lg x = \frac{\lg a}{4} + \lg 10 - \frac{\lg(a - b)}{3}$;
- з) $\lg x = -\lg 100 - \frac{1}{2}\lg a - 2\lg b$.

1023. Учитывая, что $\sin t = 0,28$ и $\cos t < 0$, найдите значение выражения:

- а) $\frac{3\sin 2t + \cos 2t}{\sin 2t - 2\cos 2t}$;
- б) $\frac{2\sin t + 3\cos t}{\sin t + 2\cos t}$;
- в) $\operatorname{ctg}\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$;
- г) $\operatorname{tg}\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$.

1024. Докажите тождество:

- а) $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$;
- б) $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$;
- в) $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \cdot (1 + \sin 2x) = \cos 2x$;
- г) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos 2x = 1 + \sin 2x$.

1025. Докажите, что верно равенство:

- а) $\cos \frac{\pi}{18} \cos \frac{5\pi}{18} \cos \frac{7\pi}{18} = \frac{\sqrt{3}}{8}$;
 б) $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$;
 в) $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$;
 г) $\frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{7}}$.

1026. Упростите выражение:

- а) $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8}$;
 б) $\sin \frac{\pi}{18} \sin \frac{5\pi}{18} \sin \frac{7\pi}{18}$;
 в) $\sin 6x \cos^3 2x + \cos 6x \sin^3 2x$;
 г) $\frac{\sin 5x + \sin 6x + \sin 7x}{\cos 5x + \cos 6x + \cos 7x}$.

1027. Найдите значение выражения:

- а) $\frac{\operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ}{\operatorname{ctg} 30^\circ}$;
 б) $\frac{(1 + \operatorname{tg} 75^\circ) \cos 75^\circ}{2\sqrt{2} \sin 120^\circ}$;
 в) $\frac{(\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ) \cos 15^\circ \cos 30^\circ}{\sin 45^\circ}$;
 г) $\frac{\operatorname{ctg}^2 34^\circ - \cos^2 34^\circ}{2 \operatorname{ctg}^2 34^\circ \cos^2 34^\circ}$;
 д) $\frac{(\operatorname{tg} 14^\circ + \operatorname{ctg} 28^\circ) \cos 14^\circ \sin 14^\circ}{\sin 24^\circ (\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{ctg} 12^\circ)}$;
 е) $\frac{(\operatorname{ctg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 54^\circ) \sin 54^\circ + 1,5}{(\operatorname{tg} 14^\circ + \operatorname{ctg} 28^\circ) \cos 14^\circ \sin 14^\circ}$;
 ж) $\frac{\operatorname{tg} 26^\circ - \operatorname{ctg} 52^\circ}{\cos 78^\circ} \cos 26^\circ \sin 52^\circ$;
 з) $\frac{\operatorname{tg}^2 31^\circ - \sin^2 31^\circ}{4 \operatorname{tg}^2 31^\circ \sin^2 31^\circ} : \left(\frac{\operatorname{ctg} 31^\circ - \operatorname{tg} 31^\circ}{\operatorname{tg} 31^\circ + \operatorname{ctg} 31^\circ} \cdot \frac{3}{\cos 62^\circ} \right)$.

1028. Упростите выражение:

- а) $\frac{\sin (2x + y)}{\sin x} - 2 \cos (x + y)$;
 б) $\sin^2 \left(\frac{\pi}{8} + x \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - x \right)$;
 в) $\frac{4 \cos 2x}{\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x}$;
 г) $\frac{2 \cos^2 x - 1}{2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right)}$.

1029. Упростите выражение:

- а) $\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{(\sin x + \cos x)^2 - 1}$;
б) $\frac{\sin 2x - \operatorname{tg} x}{\cos 2x \cdot \operatorname{tg} x}$;
в) $\frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}} - 3 \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{ctg} x$;
г) $\frac{1 + \sin 2x - \cos 2x}{1 + \sin 2x + \cos 2x} - \operatorname{tg} x$.

1030. Упростите выражение:

- а) $\frac{\sin 38^\circ + \sin 22^\circ}{\cos 8^\circ}$; в) $\frac{\sin 70^\circ - \cos 40^\circ}{\cos 50^\circ + \cos 110^\circ}$;
б) $\frac{\cos 41^\circ - \cos 49^\circ}{\sin 4^\circ}$; г) $\frac{\sin 74^\circ - \cos 74^\circ}{\sin 89^\circ - \cos 59^\circ}$.

1031. Учитывая, что α, β, γ — углы треугольника, упростите выражение:

- а) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$;
б) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$;
в) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$;
г) $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma$.

1032. Упростите выражение:

- а) $\sin(\arccos 0,8)$; в) $\cos\left(\arcsin \frac{12}{13}\right)$;
б) $\sin(\operatorname{arctg} 7)$; г) $\cos(\operatorname{arctg} \sqrt{15})$.

1033. Упростите выражение:

- а) $\operatorname{tg}(2 \arcsin 0,6)$; в) $\cos\left(\arcsin \frac{12}{13} + \arccos \frac{5}{13}\right)$;
б) $\cos(2 \operatorname{arctg} 3)$; г) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 0,4 + \arccos 0,8)$.

1034. Сравните числа:

- а) $\operatorname{arctg} \frac{2}{3}$ и $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$;
б) $\operatorname{arctg} \frac{1}{9}$ и $\frac{3\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{4}{5}$;
в) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$ и $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(2 + \sqrt{3})$;

- г) $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$ и π ;
 д) $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}$ и $\frac{\pi}{4}$;
 е) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\operatorname{arctg} (\sqrt{2} + 1)^2$.

1035. Найдите значение выражения:

- а) $\sin \left(2\arccos \frac{1}{3} \right)$; г) $\operatorname{ctg} (3\operatorname{arctg} 4)$;
 б) $\cos (3\arcsin 0,6)$; д) $\cos (2\arcsin x)$;
 в) $\operatorname{tg} (2\arcsin 0,8)$; е) $\sin (2\arccos x)$.

1036. Выразите через арккосинус:

- а) $\arcsin \frac{2}{3}$; г) $\operatorname{arctg} 2,4$;
 б) $\operatorname{arctg} 2$; д) $\arcsin (-0,6)$;
 в) $\operatorname{arctg} (-3)$; е) $\operatorname{arctg} (-2)$.

1037. Выразите через арксинус:

- а) $\arccos \frac{1}{3}$; г) $\operatorname{arctg} \frac{5}{12}$;
 б) $\operatorname{arctg} 4$; д) $\arccos (-0,8)$;
 в) $\operatorname{arctg} (-4)$; е) $\operatorname{arctg} (-2)$.

1038. Выразите через арктангенс:

- а) $\arccos 0,6$; г) $\operatorname{arctg} 0,25$;
 б) $\arccos \left(-\frac{12}{13} \right)$; д) $\arcsin (-0,8)$;
 в) $\operatorname{arctg} (-4)$; е) $\arcsin \frac{5}{12}$.

1039. Упростите выражение:

- а) $\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13}$;
 б) $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$;
 в) $\operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \operatorname{arctg} \frac{48 + 25\sqrt{3}}{39}$;
 г) $\operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$;
 д) $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65}$;
 е) $\operatorname{arctg} \frac{23}{7} + \arccos \left(-\frac{8}{17} \right)$.

1040. Найдите с точностью до минуты градусную меру дуги окружности с радиусом 24 дм, длина которой равна:

- а) 10 дм; в) 54 дм; д) 75 дм; ж) 136 дм;
б) 40 дм; г) 70 дм; е) 113 дм; з) 150 дм.

1041. Найдите с точностью до миллиметра радиус окружности, у которой дуга длиной 18 см имеет градусную меру, равную:

- а) 20° ; в) 75° ; д) 180° ; ж) 270° ;
б) 45° ; г) 160° ; е) 225° ; з) 350° .

1042. Найдите длину хорды круга с диаметром 10, учитывая, что эта хорда:

- а) отстоит от центра на 3;
б) видна из центра под углом 135° ;
в) равна перпендикулярной хорде, проведенной через один из ее концов;
г) образует с равной хордой, имеющей с ней общий конец, угол величиной 120° ;
д) разделяет перпендикулярный ей диаметр в отношении 1 : 3.

1043. Докажите, что перпендикуляр, опущенный на диаметр окружности из какой-либо ее точки, является средним геометрическим отрезков, на которые делит диаметр основание перпендикуляра.

1044. Отрезок a , соединяющий две точки окружности с радиусом r , виден из центра окружности под углом α . Докажите, что переменные a , r , α связаны формулой $a = r\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}$.

1045. Отрезки EF и GH являются равными хордами окружности с центром Q и радиусом r , параллельными ее диаметрам AB и CD , угол между которыми равен β . Найдите кратчайшее расстояние между точками хорд EF и GH , учитывая, что угол, под которым хорда GH видна из центра Q , равен α .

1046. Докажите, что:

- а) если две стороны треугольника не равны друг другу, то медиана, проведенная к третьей стороне, не является высотой и не является биссектрисой этого треугольника;

- б) если две стороны треугольника не равны друг другу, то высота, проведенная к третьей стороне, не является медианой и не является биссектрисой этого треугольника;
 в) если две стороны треугольника не равны друг другу, то биссектриса, проведенная к третьей стороне, не является медианой и не является высотой этого треугольника.

1047. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, учитывая, что:

- а) основание треугольника и его боковая сторона соответственно равны 6 и 8;
 б) основание треугольника и угол против него соответственно равны 2 и α ;
 в) площадь треугольника и угол при основании соответственно равны S и β .

* * *

1048. Для данного натурального числа n выписываются все дроби вида $\frac{1}{pq}$, где числа p и q взаимно просты, $0 < p < q \leq n$ и $p + q > n$. Докажите, что сумма всех таких дробей равна $\frac{1}{2}$.

1049. Числа a и b удовлетворяют условию $a^{2010} + b^{2010} = a^{2008} + b^{2008}$. Докажите, что $a^2 + b^2 \leq 2$.

1050. Пять отрезков имеют то свойство, что любые три из них могут быть сторонами некоторых треугольников. Докажите, что среди этих треугольников обязательно будет остроугольный.

21. Уравнения и неравенства

Из выражений с переменными с помощью отношений *равно, меньше, больше* и их отрицаний — *не равно, больше или равно, меньше или равно* — образуются формулы:

$$A = B, A < B, A > B, A \neq B, A \geq B, A \leq B.$$

Формула-равенство $A = B$ называется *уравнением*, формулы-неравенства $A < B, A > B, A \neq B, A \geq B, A \leq B$ — *неравенствами с переменными*.

Число, обращающее уравнение в истинное числовое равенство, называют *корнем уравнения*.

Решить уравнение означает найти все его корни или установить, что их нет.

Число, обращающее неравенство с переменной в истинное числовое неравенство, называют *решением неравенства*.

Решить неравенство означает найти все его решения или установить, что их нет.

Формула, которая обращается в истинное высказывание при любых наборах значений входящих в нее переменных, называется *тождественно истинной формулой*. Тождественно истинные формулы-равенства называют еще *тождествами*.

Из формул образуются их системы и совокупности.

Системой формул называется формула, которая состоит из двух или больше формул и которая истинна при тех и только тех наборах значений переменных, при которых истинна каждая из формул.

Система, состоящая из формул A и B , обозначается $\begin{cases} A, \\ B. \end{cases}$

Совокупностью формул называется формула, которая состоит из двух или больше формул и которая истинна при тех и только тех наборах значений переменных, при которых истинна хотя бы одна из формул. Совокупность, состоящая из формул A и B , обозначается $\begin{bmatrix} A, \\ B. \end{bmatrix}$

Каждая пара значений переменных, удовлетворяющая системе или совокупности формул с двумя переменными, называется *решением системы* или *совокупности*.

Решить систему или *совокупность* означает найти все ее решения или установить, что их нет.

Решение уравнений, неравенств и их систем часто предусматривает сведение их к стандартным уравнениям или неравенствам. При этом полученное в результате преобразований уравнение, неравенство или система должны иметь те же решения, что и исходные уравнение, неравенство или система. В таком случае говорят о *равносильных* уравнениях, неравенствах, системах.

Преобразованиями равносильности уравнений или неравенств являются:

- перенос слагаемого из одной части уравнения или неравенства в другую с противоположным знаком;
- умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же отличное от нуля число;

- умножение или деление обеих частей неравенства на одно и то же положительное число;
- умножение или деление обеих частей неравенства на одно и то же отрицательное число с заменой знака неравенства знаком противоположного смысла;
- возведение обеих частей уравнения или неравенства в одну и ту же нечетную степень.

При решении уравнений пользуются и преобразованиями следования, т. е. преобразованиями, при которых *все* корни данного уравнения являются корнями полученного уравнения. Примером преобразования следования является возведение обеих частей уравнения или неравенства в одну и ту же четную степень. Преобразование следования *может* приводить к появлению *побочных корней*, т. е. таких чисел, которые являются корнями полученного уравнения, но не являются корнями исходного. Поэтому при использовании преобразований следования обязательным этапом решения уравнения является *проверка* того, являются ли полученные числа корнями данного уравнения.

При решении уравнений и неравенств используются такие типичные приемы, как *введение вспомогательной переменной, разложение на множители, перебор случаев, сведение к системе, использование графических представлений, использование свойств функций*. Проиллюстрируем сказанное примерами.

Уравнение $\frac{15}{x^2 - x + 1} = (x - 1)^2 + x^2$ с введением переменной $y = x^2 - x + 1$ приводится к уравнению $\frac{15}{y} = 2y - 1$.

Уравнение $x^2 \sin x + \cos x = x^2 \cos x + \sin x$ можно записать в виде $(x^2 - 1)(\sin x - \cos x) = 0$. Поэтому оно сводится к совокупности уравнений
$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ \sin x - \cos x = 0. \end{cases}$$

С разложением на множители связан *метод интервалов*, с использованием которого решаются рациональные неравенства. Неравенство $\frac{2}{t+3} + \frac{2}{3t+2} \geq \frac{3}{2t-1}$ сводится к неравенству $\frac{(t+1)(t-4)}{(t+3)(3t+2)(2t-1)} \geq 0$, для которого метод интервалов

(рис. 247) в качестве ответа дает множество $(-3; -1] \cup \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup [4; +\infty)$.

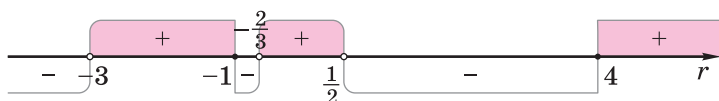


Рис. 247

При решении неравенства с модулем $|x + 2| + |2x - 5| < 7$ приходится рассматривать его на трех промежутках $(-\infty; -2)$, $[-2; 2,5]$ и $(2,5; +\infty)$.

Уравнение $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1$ заменой $\begin{cases} \sqrt[3]{x+45} = a, \\ \sqrt[3]{x-16} = b \end{cases}$ сводится к системе $\begin{cases} a - b = 1, \\ a^3 - b^3 = 61, \end{cases}$ которая равносильна системе $\begin{cases} a - b = 1, \\ (a - b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab) = 61, \end{cases}$ или системе $\begin{cases} a - b = 1, \\ ab = 20. \end{cases}$ Ее

решения $(5; 4)$ и $(-4; -5)$ позволяют получить решения данного уравнения: $x_1 = 80$ и $x_2 = -109$.

Чтобы ответить на вопрос о количестве корней уравнения $\lg x = \sin x$, удобно использовать графический способ решения. Построив графики функций $y = \lg x$ и $y = \sin x$ (рис. 248), замечаем, что они имеют 3 точки пересечения: одна — на промежутке $(0,5\pi; \pi)$, другая — на промежутке $(2\pi; 2,5\pi)$ и третья — на промежутке $(2,5\pi; 3\pi)$.

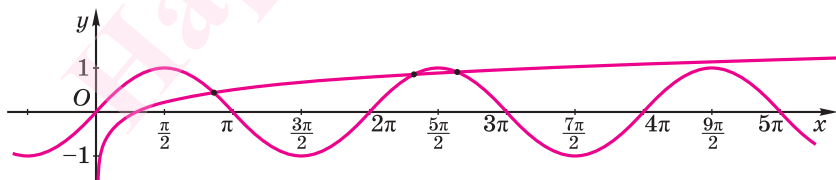


Рис. 248

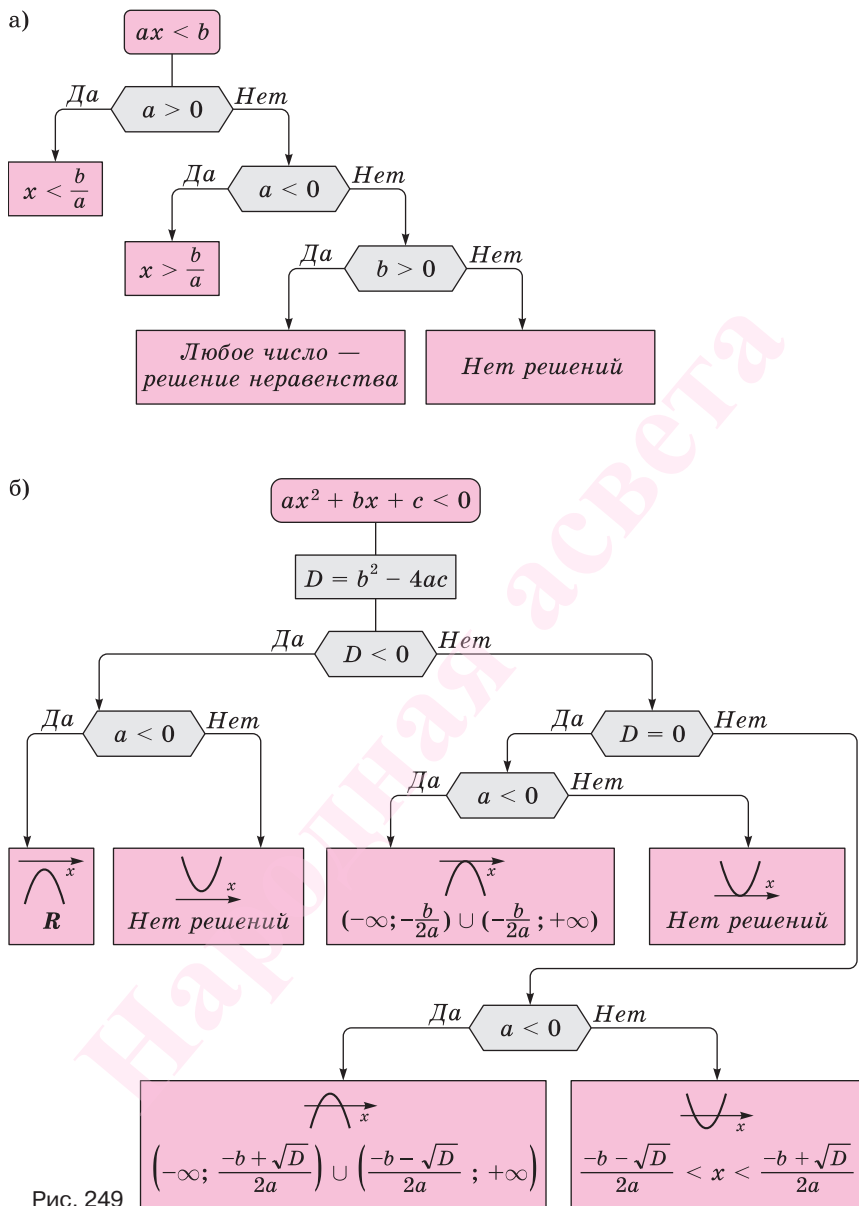
При решении уравнения $\sqrt{2x+5} + \sqrt[5]{2x-5} = 4 - x$ находим подбором, что число 2 является корнем. Других корней уравнение не имеет, поскольку функция $y = \sqrt{2x+5} + \sqrt[5]{2x-5}$, определяемая левой частью уравнения, возрастает на области определения, а функция $y = 4 - x$ убывает.

Сведения о решении линейных, квадратных, двучленных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений приведены в следующей таблице.

Уравнение	Множество корней
$ax = b$	$\frac{b}{a}$, если $a \neq 0$
$ax^2 + bx + c = 0$	$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, если $D = b^2 - 4ac \geq 0$
$x^n = a$	$\sqrt[n]{a}$, если n — нечетное число; $\pm \sqrt[n]{a}$, если n — четное число и $a \geq 0$
$a^x = b$	$\log_a b$, если $b > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$
$\log_a x = b$	a^b
$\sin x = a$	$(-1)^k \arcsin a + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, если $ a \leq 1$
$\cos x = a$	$\pm \arccos a + 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, если $ a \leq 1$
$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{arctg} a + m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$\operatorname{arctg} a + m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$

Сведения о решении линейных, квадратных, двучленных, показательных, логарифмических и тригонометрических неравенств даются в следующей таблице.

Неравенство	Множество решений
$ax < b$	Рис. 249, а
$ax^2 + bx + c < 0$	Рис. 249, б
$x^n < a$	$(-\infty; \sqrt[n]{a})$, если n — нечетное число; $(-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a})$, если n — четное число и $a \geq 0$
$a^x < b$	$(-\infty; \log_a b)$, если $b > 0$ и $a > 1$; $(\log_a b; +\infty)$, если $b > 0$ и $0 < a < 1$
$\log_a x < b$	$(0; a^b)$, если $a > 1$; $(a^b; +\infty)$, если $0 < a < 1$
$\sin x < a$	$(-\pi - \arcsin a + 2k\pi; \arcsin a + 2k\pi)$, $m \in \mathbf{Z}$, если $ a \leq 1$
$\cos x < a$	$(\arccos a + 2k\pi; 2\pi - \arccos a + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, если $ a \leq 1$
$\operatorname{tg} x < a$	$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \operatorname{arctg} a + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{ctg} x < a$	$(\operatorname{arctg} a + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$



При решении систем уравнений стремятся уменьшить количество переменных и получить уравнение с одной переменной, которое позволит найти ее значения, а затем для каждого из полученных значений отыскивать значения остальных переменных. Исключить одну из переменных из системы двух

линейных уравнений с двумя переменными можно *способом подстановки или способом алгебраического сложения*.

Уравнение, неравенство или система могут содержать две или больше переменных, причем одна из них считается переменной уравнения, а остальные рассматриваются как параметры, т. е. их значения считаются фиксированными. В таком случае говорят об *уравнении, неравенстве или системе с параметрами*.

Решить уравнение, неравенство или систему с параметрами означает для каждого набора значений параметров найти корни или решения соответствующих уравнения, неравенства или системы.

- ❓ 1. Что называется корнем уравнения? Как понимать задание *Решить уравнение*?
2. Что называется решением неравенства? Как понимать задание *Решить неравенство*?
3. Что называется решением системы? Как понимать задание *Решить систему*?
4. Как понимать задание *Решить уравнение (неравенство, систему) с параметром*?
5. Какие условия называются равносильными?
6. Когда одно из условий считается следствием другого?
7. Как решают простейшие уравнения; простейшие неравенства?
8. Как решают уравнения и неравенства с переменной под знаком модуля?
9. Как решают дробно-рациональные уравнения и неравенства?
10. Как решают иррациональные уравнения и неравенства?
11. Как решают показательные уравнения и неравенства?
12. Как решают логарифмические уравнения и неравенства?
13. Как решают тригонометрические уравнения и неравенства?
14. Какие приемы используются при решении уравнений и неравенств?

1051. Решите уравнение:

- а) $0,15x = \frac{3}{5}$; в) $\frac{4}{7}x = -1, (7)$;
- б) $-\frac{5}{17}x = 0,85$; г) $-2,0(7)x = \frac{77}{18}$.

1052. Решите неравенство:

- а) $\frac{2x+3}{5} + \frac{x+7}{2} > 7$; в) $\frac{3x+5}{7} + \frac{10-3x}{5} \leq \frac{2x-7}{3} - 7$;
- б) $\frac{2x+1}{3} < 1 + \frac{3x-1}{2}$; г) $\frac{7x}{3} - \frac{11(x+3)}{6} \geq \frac{3x-1}{5} - \frac{13-x}{2}$.

1053. Решите уравнение:

а) $5 - 3(x - 2(x - 2(x - 2))) = 2$;

б) $\frac{3}{2 - \frac{3}{2 - \frac{3}{2 - x}}} = \frac{21}{8}$;

в) $\frac{x}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{20} + \frac{x}{30} + \frac{x}{42} = -6$;

г) $1 - \frac{x - \frac{x+1}{3}}{3} = \frac{x}{2} - \frac{2x - \frac{10-7x}{3}}{2}$.

1054. При каком значении переменной a уравнение $ax - 4 = 3x$ имеет корнем число 8?

1055. При каком значении переменной a через точку $A(-1; 5)$ проходит прямая:

а) $y = ax - 3$; б) $y = 3x + a$?

1056. При каких значениях переменной a не имеет корней уравнение:

а) $2(a - 2x) = ax + 3$; в) $a^2x = a(x + 2) - 2$;

б) $\frac{8+5x}{2-x} = 2a$; г) $\frac{x-5}{7-x} = \frac{a-x}{7-x}$?

1057. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x + 5y = 21, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + 5y = 15, \\ x - 2y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + 5y = 15, \\ 3x + 8y = -1. \end{cases}$

1058. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ \frac{5}{3-2x} = \frac{2,5}{1-y}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x + \frac{9}{y} = 21, \\ \frac{18}{y} = 17 - 3x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{4}, \\ \frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{2}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 21, \\ \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 13. \end{cases}$

1059. При каких значениях переменной a не имеет решений система:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x + ay = 1, \\ x - 3ay = 2a + 3; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} -4x + ay = 1 + a, \\ (6 + a)x + 2y = 3 + a; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} 16x + ay = 4, \\ ax + 9y - 3 = 0; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} (a + 1)x - 3y = 4, \\ 2x - ay = 3? \end{cases} \end{array}$$

1060. При каких значениях переменной a имеет бесконечно много решений система:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 3x + ay = 3, \\ ax + 3y = 3; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} (a + 1)x - y = 2 + a, \\ x + (a - 1)y = 2; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x + ay = 1, \\ ax - 3ay = 3 + 2a; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} (a + 1)x + 8y = 4a, \\ ax + (a + 3)y = 3a - 1? \end{cases} \end{array}$$

1061. Решите уравнение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } a^2 + 2a = 0; & \text{д) } w + \frac{1}{w} = 2,5; \\ \text{б) } b^2 - 8b + 7 = 0; & \text{е) } \frac{7}{u+4} + u = 4; \\ \text{в) } c^2 + 4c + 4 = 0; & \text{ж) } \frac{y}{2y+3} = \frac{1}{y}; \\ \text{г) } d^2 - 3d + 6 = 0; & \text{з) } \frac{x}{x+1} - \frac{x+2}{x-2} = 1. \end{array}$$

1062. При каких значениях переменной a имеет единственный корень уравнение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } ax^2 + 6x + 9 = 0; & \text{в) } 4x^2 - ax + a - 3 = 0; \\ \text{б) } x^2 + ax + \frac{1}{4} = 0; & \text{г) } (a + 1)x^2 + 2ax + a - 3 = 0? \end{array}$$

1063. Решите уравнение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{6}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} = 2 - \frac{x+4}{x+1}; & \text{д) } a^3 - 5a^2 + 6a = 0; \\ \text{б) } \frac{y^3+8}{y+2} = 1 - 6y; & \text{е) } (b+1)(b^2-5b) + 6(b+1) = 0; \\ \text{в) } \frac{3}{z+2} - \frac{2z-1}{z+1} = \frac{2z+1}{z^2+3z+2}; & \text{ж) } c^3 - 3c^2 - c + 3 = 0; \\ \text{г) } \frac{4}{t+2} - \frac{3}{t-2} - \frac{12}{4-t^2} = \frac{1}{7}; & \text{з) } d^3 + d^2 - d - 1 = 0. \end{array}$$

1064. Решите уравнение:

- а) $r^6 + 7r^3 - 8 = 0$;
б) $2u^8 + 5u^4 - 7 = 0$;
в) $(2t^2 + 3t)^2 - 7(2t^2 + 3t) = -10$;
г) $\frac{4}{w} + 5 = \frac{1}{w^2}$;
д) $\frac{1}{v^2 + 1} + \frac{2}{v^2 + 2} = 2$;
е) $\frac{3}{s^3 + 3} + \frac{2}{s^3 + 2} = 2$;
ж) $a^2 + \frac{1}{a^2} + a + \frac{1}{a} = 4$;
з) $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$;
и) $2\left(l^2 + \frac{1}{l^2}\right) + 4,5\left(l + \frac{1}{l}\right) - 13 = 0$;
к) $c(c + 1)(c + 2)(c + 3) = 24$.

1065. Учитывая, что x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2 - 2x - 6 = 0$, найдите значение выражения:

- а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; б) $x_1^2 + x_2^2$; в) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$; г) $x_1^3 + x_2^3$.

1066. Найдите сумму корней уравнения $x^2 + ax + 6 = 0$, учитывая, что сумма их квадратов равна 13.

1067. Решите систему уравнений:

- а) $\begin{cases} a + b = 7, \\ ab = 12; \end{cases}$ д) $\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30; \end{cases}$
б) $\begin{cases} i + j = 5, \\ i^2 - ij + j^2 = 7; \end{cases}$ е) $\begin{cases} uv = 48, \\ u^2 + v^2 = 100; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 3l + t = 2, \\ l^2 - lt + 6t = -4; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} m^2 + mn = 15, \\ n^2 + mn = 10; \end{cases}$
г) $\begin{cases} c^2 + d^2 = 20, \\ cd = 8; \end{cases}$ з) $\begin{cases} r^3 + s^3 = 28, \\ r + s = 4. \end{cases}$

1068. Решите систему уравнений:

- а) $\begin{cases} v^2w^3 = 8, \\ v^3w^2 = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} a^2 + 3ad = 18, \\ 3d^2 + ad = 6; \end{cases}$
б) $\begin{cases} b^2 + c = 6, \\ c^2 + b = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} k^3 + l^3 = 65, \\ k^2l + kl^2 = 20. \end{cases}$

1069. Решите уравнение:

а) $2\sqrt{c+5} = c+2$;

д) $\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x$;

б) $d-1=\sqrt{d+5}$;

е) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3$;

в) $\sqrt{w}-\sqrt{w+3}=1$;

ж) $\sqrt{11a-2}+3\sqrt{a}=6$;

г) $\sqrt{3u+1}-2-\sqrt{u+1}=0$;

з) $\sqrt{5c+6}=7-\sqrt{c+7}$.

1070. Решите уравнение:

а) $\frac{b+3}{\sqrt{b-1}}=\sqrt{3b+1}$;

ж) $\frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}+\frac{1}{t-\sqrt{1+t^2}}=t-3$;

б) $\sqrt{9-5d}=\sqrt{3-d}+\frac{6}{\sqrt{3-d}}$;

з) $\frac{1}{1-\sqrt{1-j}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-j}}=\frac{\sqrt{3}}{j}$;

в) $\frac{\sqrt{6-x-x^2}}{2x-5}=\frac{\sqrt{6-x-x^2}}{x-2}$;

и) $\sqrt{y-5}+6=5\sqrt[4]{y-5}$;

г) $\frac{2}{2-\sqrt{z}}+0,5=\frac{4}{2\sqrt{z}-z}$;

к) $s\sqrt{3s^2+13}-\sqrt{s}\sqrt[4]{3s^2+13}=2$;

д) $\sqrt[3]{b+2}-\sqrt[3]{b-17}=1$;

л) $\sqrt{-v}+\sqrt{v^2+24}=v+1$;

е) $\sqrt[3]{l-2}+\sqrt[3]{l-3}=\sqrt[3]{2l-5}$;

м) $\sqrt{1-\sqrt{u^4-u^2}}=u-1$.

1071. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{y}=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2}, \\ x+y=5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ \sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=-1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sqrt{2x+y+2}=3, \\ \sqrt{2x+y-3}=y-x. \end{cases}$

1072. Решите уравнение:

а) $|2x+1|=2x$;

ж) $|5-2t|+|t+3|=2-3t$;

б) $|2y-3|=y$;

з) $|l-2|+|4-l|=6-2l$;

в) $|w-3|=-1$;

и) $|u^2+u|+3u-5=0$;

г) $|z-2|=-z$;

к) $|v^2-1|+v=5$;

д) $|a-3|+2|a+1|=4$;

л) $3|j^2+4j+2|=5j+16$;

е) $|b+3|+|2b-1|=8$;

м) $|i^2-5i+9|=|i-6|$.

1073. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

а) $(x-1)(x+2)\leq 0$;

в) $3x^2-7x+2\leq 0$;

б) $x^2(x-2)(x+3)\leq 0$;

г) $-x^2-5x+6> 0$.

1074. Решите уравнение:

а) $2^{a+1} + 4^a = 80$;

е) $3^{2z} - 2 \cdot 3^z = 3$;

б) $3^b + 3^{1-b} = \frac{28}{3}$;

ж) $\frac{3^r + 3^{-r}}{3^r - 3^{-r}} = 2$;

в) $7^{2c} - 6 \cdot 7^c + 5 = 0$;

з) $2 \cdot 3^{l+1} - 5 \cdot 9^{l-2} = 81$;

г) $\frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} = \frac{17}{15}$;

и) $4^p + 6^p = 2 \cdot 9^p$;

д) $10^{1+y^2} - 10^{1-y^2} = 99$;

к) $2 \cdot 4^t - 5 \cdot 6^t + 3 \cdot 9^t = 0$.

1075. Решите неравенство:

а) $6^{3-y} < 216$;

б) $1000 \cdot 0,3^{\sqrt{a}+1} < 27$;

в) $2^{b^2-6b-2,5} > 16\sqrt{2}$;

г) $(\lg 3)^{3l-7} > (\log_3 10)^{7l+3}$;

д) $(\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5)^t > (\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 6)^{2t}$;

е) $2^u \cdot 5^u > 0,1 \cdot (10^{u-1})^5$;

ж) $3^{-v-1} \cdot 4^{-v-1} > 12 \cdot (144^{2v-1})^2$;

з) $35^{r+\sqrt{r^2-1}} \cdot 13^{2\sqrt{r^2-1}} > 35^{r-\sqrt{r^2-1}}$.

1076. Решите уравнение:

а) $\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3$;

б) $\log_3(x^3 - x) - \log_3 x = 1$;

в) $\frac{1}{2} \lg(x^2 + x - 5) = \lg 7x + \lg \frac{1}{7x}$;

г) $\frac{1}{2} \lg(x^2 - 4x - 1) = \lg 8x - \lg 4x$;

д) $\log_3(5x+3) = \log_3(7x+5)$;

е) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1) = \log_{\frac{1}{2}}(6x+8)$.

1077. Найдите область определения функции:

а) $y = \log_7(5-2a)$;

в) $y = \log_{t+3}(2t+10)$;

б) $y = \log_2(x^2 - 2x)$;

г) $y = \log_{l^2-4}(l^2 + l - 12)$.

1078. Решите неравенство:

а) $\log_5 \frac{3t-2}{t^2+1} > 0;$

ж) $\log_6(t^2 - 3t + 2) \geq 1;$

б) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2y^2+3}{y-7} < 0;$

з) $\log_8(a^2 - 4a + 3) < 1;$

в) $\ln(3v - 4) \leq \ln(2v + 1);$

и) $\lg(i^2 - 8i + 13) > 0;$

г) $\log_{\frac{1}{2}}(2l + 3) > \log_{\frac{1}{2}}(l + 1);$

к) $\log_{\frac{1}{5}}(b^2 - 5b + 7) < 0;$

д) $\log_3(s^2 + 2s) \geq 1;$

л) $\log_2(f^2 + 2f) < 3;$

е) $\log_{\frac{2}{3}}(z^2 - 2,5z) < -1;$

м) $\log_{\frac{1}{2}}(s^2 - 5s - 6) \geq -3.$

1079. Решите уравнение:

а) $\log_3^2 f - 3 \log_3 f + 2 = 0;$

б) $\frac{1}{3 - \lg x} + \frac{1}{1 + \lg x} = 1;$

в) $\log_3^2 b + \log_3 b = 8;$

г) $\lg^3 c^2 = 8 \lg c;$

д) $\log_2 l \log_4 l \log_8 l \log_{16} l = \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}} l;$

е) $\log_2 t + \log_{\sqrt{2}} t + \log_{\frac{1}{2}} t = 6;$

ж) $\log_{3i} \frac{3}{i} + \log_3^2 i = 1;$

з) $\log_x(x - 2) = -1.$

1080. Решите неравенство:

а) $\lg m > 1;$

г) $\log_{0,5} q > 2;$

ж) $\log_3 u - \log_u 3 \leq \frac{3}{2};$

б) $\lg n < 2;$

д) $\lg(1 - r) \geq 2;$

з) $\log_2(2v - 3) < 3;$

в) $\log_2 p \leq -1;$

е) $\ln s^2 < 1;$

и) $\log_{\frac{1}{2}}(w + 5) < -2.$

1081. Решите неравенство:

а) $\lg y + \lg(y - 3) < 1;$

д) $\frac{1}{\log_2(c - 2)} \leq \frac{1}{2};$

б) $(\log_2 z)^2 \leq 4;$

е) $\log_d 3 \leq -1;$

в) $\lg(2a + 3) < \lg(a - 1);$

ж) $\log_{\frac{1}{3}} f + \log_3 f + \log_9 f \leq -1;$

г) $2 \lg(b + 2) > \lg(b + 4);$

з) $\frac{\lg 10g}{\lg g} \geq 2.$

1082. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 3^y \cdot 5^x = 45; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} c^{d+2} = 10, \\ c^{2d-1} = 100; \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} ef = 10, \\ (\lg e)(\lg f) = -2; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} 3^a - 2^{2b} = 77, \\ 3^{\frac{a}{2}} - 2^b = 7; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 2^u + 2^v = 6, \\ u + v = 3; \end{cases} & \text{е) } \begin{cases} m^n = 16, \\ n + \log_2 m = 5. \end{cases} \end{array}$$

1083. Решите уравнение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \operatorname{ctg} 5a = \operatorname{ctg} 2a; & \text{д) } \frac{1 - \cos 2x}{\sin x} = 2; \\ \text{б) } \cos 6b + \sin^2 3b = 0; & \text{е) } \cos 7s = \cos 5s + \sin s; \\ \text{в) } 2\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 1; & \text{ж) } \frac{1 + \operatorname{tg} 3b}{1 - \operatorname{tg} 3b} = 1; \\ \text{г) } 3\cos^2 z + 5\sin^2 z = 3,5; & \text{з) } 2 + \sin v \cos v = 2 \sin v + \cos v. \end{array}$$

1084. Решите уравнение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sqrt{3} \sin w = \cos w; & \text{д) } \sin 2b + \cos 2b = \sqrt{2} \sin 3b; \\ \text{б) } 2 \sin^2 a - \sqrt{3} \sin 2a = 0; & \text{е) } 1 - \cos 2j = \sin j; \\ \text{в) } \sin 3c = \sin 4c; & \text{ж) } \sin 3r = \sin r + \sin 2r; \\ \text{г) } \operatorname{tg}^3 u + \operatorname{tg}^2 u - 3 \operatorname{tg} u = 3; & \text{з) } \operatorname{tg}^2 q + 3 \operatorname{ctg}^2 q = 4. \end{array}$$

1085. Решите уравнение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sin^2 2a + \sin^2 a = \frac{9}{16}; & \text{е) } 2 \operatorname{tg} y - 2 \operatorname{ctg} y = 3; \\ \text{б) } 2(1 - \cos 2b) = \sqrt{3} \operatorname{tg} b; & \text{ж) } \cos 2z + 3 \sin z = 2; \\ \text{в) } \sin 5c = \cos 4c; & \text{з) } \operatorname{tg}(70^\circ + t) + \operatorname{tg}(20^\circ - t) = 2; \\ \text{г) } 25 \sin^2 d + 100 \cos d = 89; & \text{и) } \sin l + \sin \frac{1}{\pi} = \sin\left(l + \frac{1}{\pi}\right); \\ \text{д) } \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} = 1 + \cos 4x; & \text{к) } 6 \operatorname{ctg}^2 w - 2 \cos^2 w = 3. \end{array}$$

1086. Решите неравенство:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}; & \text{д) } \operatorname{tg} z \leq 1; & \text{и) } 0 \leq \sin u < \frac{1}{2}; \\ \text{б) } \sin a < -\frac{1}{2}; & \text{е) } \operatorname{tg} c > \sqrt{3}; & \text{к) } -\frac{1}{2} < \cos p \leq 0; \\ \text{в) } \cos y < \frac{\sqrt{3}}{2}; & \text{ж) } \operatorname{ctg} t < \frac{\sqrt{3}}{3}; & \text{л) } 0 \leq \operatorname{tg} v < \frac{1}{\sqrt{3}}; \\ \text{г) } \cos b \geq \frac{1}{2}; & \text{з) } \operatorname{ctg} d \geq -1; & \text{м) } -\sqrt{3} \leq \operatorname{ctg} q \leq -1. \end{array}$$

1087. Два автомобиля, двигаясь по кольцевой трассе, встречаются каждые полчаса. Если бы они двигались в одном направлении, то оказывались бы рядом каждый час. За какое время проезжает кольцевую трассу каждый из автомобилей?

1088. Пассажир, ехавший из A в B , половину времени ехал автобусом, а половину — на автомобиле. Если бы он половину пути ехал автобусом, а половину — на автомобиле, то на весь путь затратил бы вдвое больше времени. Определите, во сколько раз скорость автомобиля больше скорости автобуса.

1089. Человек, идущий по шоссе, заметил, что каждые 15 мин его обгоняет автобус и каждые 10 мин он встречает автобус. Учитывая, что автобусы движутся в обе стороны с одинаковыми интервалами, найдите эти интервалы.

1090. Автомобильная колонна едет со скоростью 80 км/ч. Навстречу со скоростью 40 км/ч едет машина ГАИ, при встрече с которой каждый автомобиль снижает свою скорость до 60 км/ч. Во сколько раз изменится длина автоколонны после того, как она разминется с машиной ГАИ?

1091. Эскалатор метро спускает идущего по нему человека за 1 мин. Если бы человек шел вдвое быстрее, то он спустился бы за 45 с. Определите, сколько времени спускается по эскалатору стоящий человек.

1092. Два бегуна стартовали с интервалом 2 мин. Пробежав 1 км, второй из них догнал первого, пробежал еще 4 км, повернул назад и встретил первого, который к этому моменту находился в дороге 20 мин. Определите скорость второго бегуна.

* * *

1093. Решите в целых числах уравнение $3(x^2 + xy + y^2) = x + 8y$.

1094. Диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и равны. Найдите его углы, учитывая, что $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$, $CD = \sqrt{3}$.

1095. Несколько чисел выписаны по кругу. Если для некоторых четырех записанных друг за другом чисел a, b, c, d выполняется условие $(a - d)(b - c) < 0$, то числа b и c можно поменять местами. Докажите, что эту операцию нельзя выполнять бесконечно долго.

22. Координаты и функции

Если на прямой выбраны две точки O и E и с ними сопоставлены числа 0 и 1 соответственно, то говорят, что на прямой задана *система координат*, а саму прямую называют *координатной прямой* или *координатной осью*. Точку O называют *началом координат*, а отрезок OE — *единичным отрезком*. Соответствие между точками координатной прямой и действительными числами взаимно однозначное: каждой точке координатной прямой соответствует единственное действительное число, а каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой. Число x , соответствующее точке A координатной прямой, называют *координатой* этой точки и записывают $A(x)$.

Когда на каждой из двух перпендикулярных прямых заданы системы координат с общим началом в точке O пересечения прямых (рис. 250), то говорят, что задана *система координат на плоскости*. Плоскость, на которой задана система координат, называется *координатной плоскостью*, одну из координатных прямых, обычно горизонтальную, называют *осью абсцисс*,

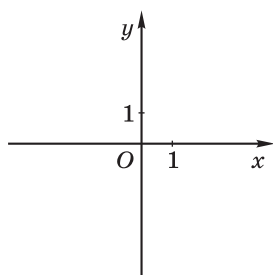


Рис. 250

другую — *осью ординат*. Соответствие между точками координатной плоскости и парами действительных чисел взаимно однозначное: каждой точке координатной плоскости соответствует единственная пара действительных чисел, а каждой паре действительных чисел соответствует единственная точка координатной плоскости. Числа x и y пары $(x; y)$, соответствующие точке M координатной плоскости, называют *координатами* этой точки, причем первая координата называется *абсциссой*, вторая — *ординатой*. Это записывают $M(x; y)$.

Если есть точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$, то расстояние между ними выражает число $|x_1 - x_2|$, а если точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то число $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (рис. 251).

Зависимость одной переменной y от другой x , при которой каждому значению переменной x из некоторого множества D соответствует единственное значение переменной y , называется *функциональной зависимостью* или *функцией*.

Функциональную зависимость переменной y от переменной x обозначают $y = f(x)$ или $y = y(x)$. При этом переменную x называют *аргументом* функции.

Множество тех значений, которые может принимать аргумент функции, называется *областью определения функции*, а множество тех значений, которые может принимать зависимая переменная y — *областью значений функции*. Область определения функции $y = f(x)$ обозначают символом $D(y)$, а область значений — $E(y)$ (рис. 252).

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Число M называют *наибольшим (наименьшим) значением функции на множестве K* , если это число является значением функции при некотором значении x_0 аргумента из множества K , а при других значениях аргумента из мно-

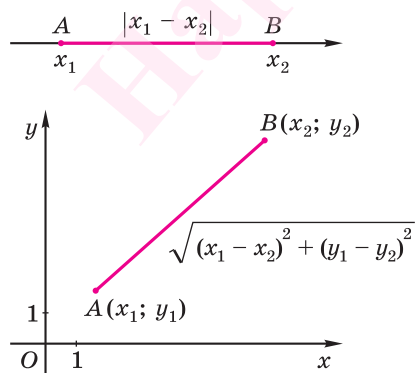


Рис. 251

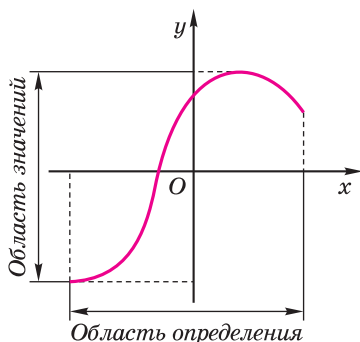
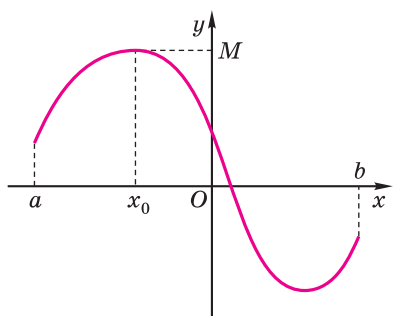
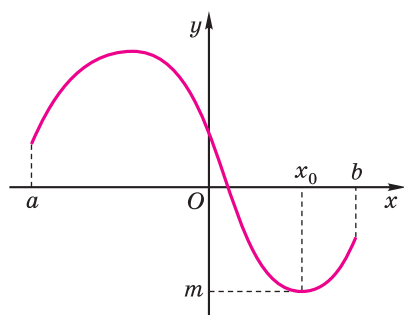


Рис. 252



$$K = [a, b]$$

M — наибольшее значение функции на $K \stackrel{\text{онр}}{=} \exists$ существует такое x_0 из K , что $M = y(x_0)$ и для всех x из K $y(x) \leq M$.



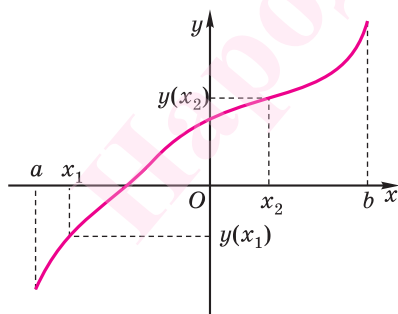
$$K = [a, b]$$

m — наименьшее значение функции на $K \stackrel{\text{онр}}{=} \exists$ существует такое x_0 из K , что $m = y(x_0)$ и для всех x из K $y(x) \geq m$.

Рис. 253

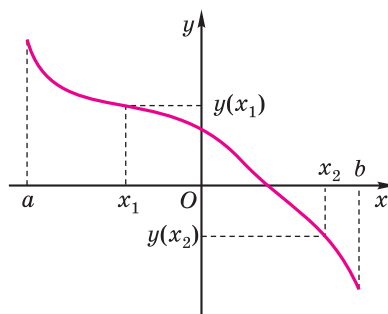
жества K значения функции не больше (не меньше) числа M (рис. 253).

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве K , если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее (меньшее) значение функции (рис. 254).



$$K = [a, b]$$

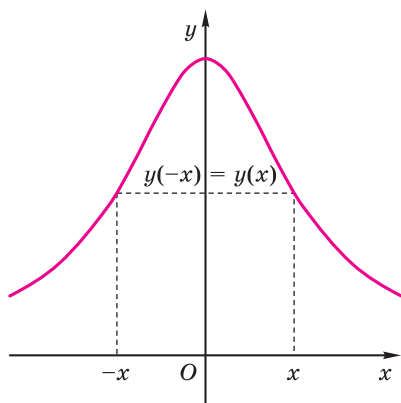
Функция y — возрастающая на $K \stackrel{\text{онр}}{=} \forall$ для любых x_1 и x_2 из K , если $x_2 > x_1$, то $y(x_2) > y(x_1)$.



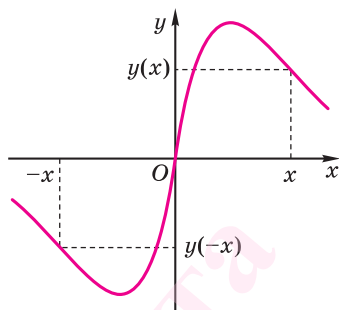
$$K = [a, b]$$

Функция y — убывающая на $K \stackrel{\text{онр}}{=} \forall$ для любых x_1 и x_2 из K , если $x_2 > x_1$, то $y(x_2) < y(x_1)$.

Рис. 254



Функция y — четная $\overset{\text{опр}}{\equiv}$ для любого x из области определения выполняется равенство $y(-x) = y(x)$.



Функция y — нечетная $\overset{\text{опр}}{\equiv}$ для любого x из области определения выполняется равенство $y(-x) = -y(x)$.

Рис. 255

Функция $y = f(x)$ называется *четной* (*нечетной*), если для каждого значения аргумента x из области определения значения функции $y(-x)$ и $y(x)$ равны (противоположны) (рис. 255). График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции — относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической* с периодом T , $T \neq 0$, если для любого значения аргумента x из области определения значения функции в точках x , $x - T$, $x + T$ равны друг другу, т. е. $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$.

Функция, которая задается уравнением $y = ax + b$, называется *линейной*. Ее графиком является прямая, образующая с осью абсцисс такой угол α , что $a = \operatorname{tg} \alpha$. Число a называют *угловым коэффициентом прямой*, являющейся графиком функции $y = ax + b$. Графики двух разных линейных функций, заданных формулами вида $y = ax + b$, пересекаются, если их угловые коэффициенты различны, и параллельны, если угловые коэффициенты одинаковы.

Функция, которая задается уравнением $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется *квадратной функцией*. Ее графиком является парабола, вершина которой находится в точке $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$. Эта парабола имеет ось симметрии прямую

$y = -\frac{b}{2a}$, и ее ветви направлены вверх, если $a > 0$, или вниз, если $a < 0$. Среднее арифметическое абсцисс точек параболы $y = ax^2 + bx + c$ с одинаковыми ординатами равно абсциссе вершины этой параболы.

Функция, которая задается уравнением $y = x^r$, называется *степенной функцией*.

Показательной функцией называется функция, которая задается уравнением $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.

Логарифмической функцией называется функция, которая задается уравнением $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.

Свойства простейших степенных, показательных и логарифмических функций следующие.

Функция	$D(y)$	$E(y)$	Четность	Монотонность	График
$y = x$	R	R	Нечетная	Возрастает	Рис. 256, а
$y = x^2$	R	$[0; +\infty)$	Четная	Убывает на $(-\infty; 0)$, возрастает на $(0; +\infty)$	Рис. 256, б
$y = x^3$	R	R	Нечетная	Возрастает	Рис. 256, в
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	Нечетная	Убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$	Рис. 256, г
$y = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	Ни четная, ни нечетная	Возрастает	Рис. 256, д
$y = \sqrt[3]{x}$	R	R	Нечетная	Возрастает	Рис. 256, е
$y = 2^x$	R	$(0; +\infty)$	Ни четная, ни нечетная	Возрастает	Рис. 256, ж
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	R	$(0; +\infty)$	Ни четная, ни нечетная	Убывает	Рис. 256, з
$y = \log_2 x$	$(0; +\infty)$	R	Ни четная, ни нечетная	Возрастает	Рис. 256, и
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	$(0; +\infty)$	R	Ни четная, ни нечетная	Убывает	Рис. 256, к

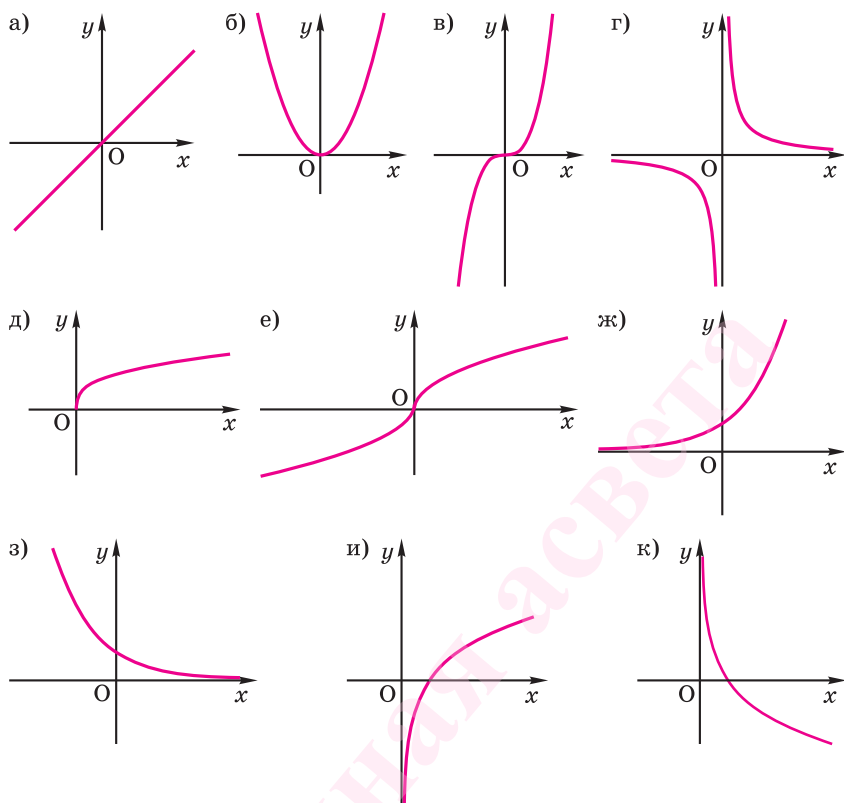


Рис. 256

Функции, которые задаются формулами $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, где x — аргумент, называются *синусом*, *косинусом*, *тангенсом*, *котангенсом* соответственно.

Функции, которые задаются формулами $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, где x — аргумент, называются *арксинусом*, *арккосинусом*, *арктангенсом*, *арккотангенсом* соответственно.

Свойства тригонометрических функций следующие.

Свойство	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
$D(y)$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$, без чисел $\frac{\pi}{2} + k\pi$	$\mathbf{R}$, без чисел $k\pi$
$E(y)$	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
Четность	Нечетная	Четная	Нечетная	Нечетная

Свойство	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Наименьший положительный период	2π	2π	π	π
Промежутки возрастания	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$	$[-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$	Нет
Промежутки убывания	$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$	$[0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$	Нет	$(0 + k\pi; \pi + k\pi)$
Нули	$k\pi$	$\frac{\pi}{2} + k\pi$	$k\pi$	$\frac{\pi}{2} + k\pi$
Промежутки отрицательных значений	$(-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$	$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi\right)$	$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi\right)$
Точки максимума	$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$2k\pi$	Нет	Нет
Точки минимума	$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$\pi + 2k\pi$	Нет	Нет
График	Рис. 257, а	Рис. 257, б	Рис. 257, в	Рис. 257, г

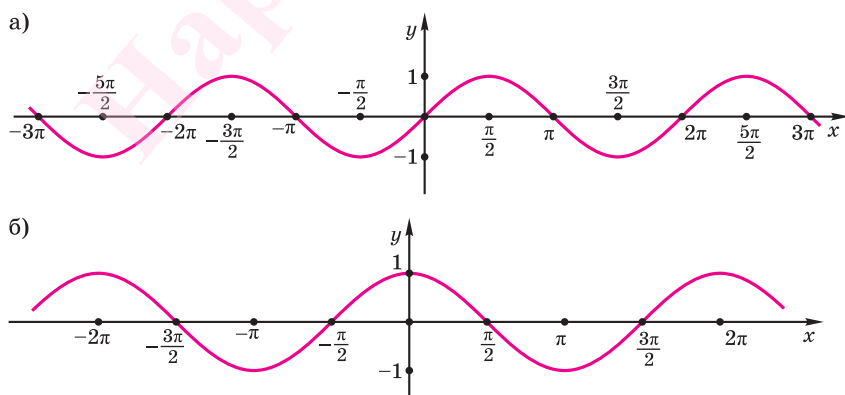


Рис. 257, а, б

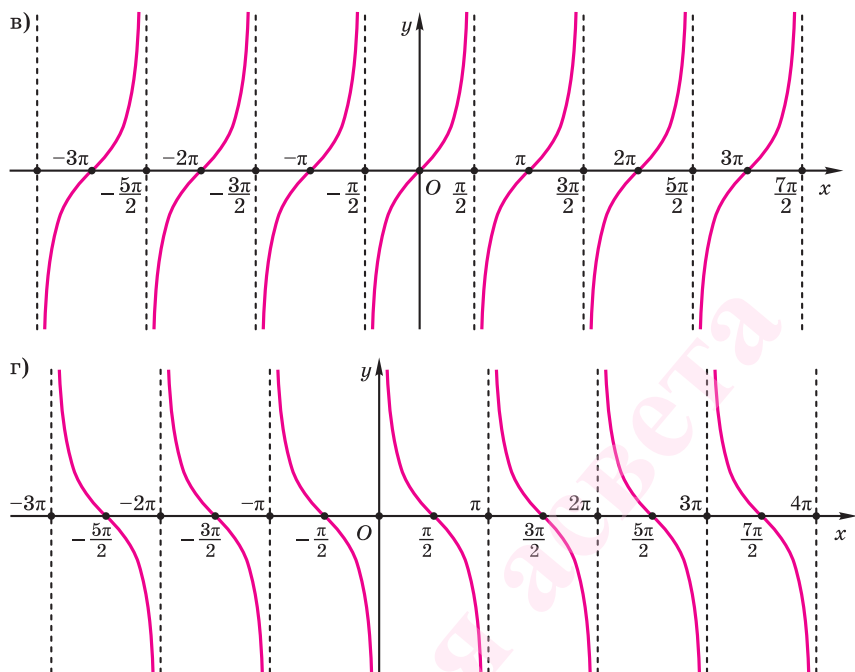


Рис. 257, в, г

Свойства обратных тригонометрических функций следующие.

Функция	$D(y)$	$E(y)$	Четность	Монотонность	График
$y = \arcsin x$	$[-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	Нечетная	Возрастает	Рис. 258, а
$y = \arccos x$	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$	Ни четная, ни нечетная	Убывает	Рис. 258, б
$y = \operatorname{arctg} x$	$\mathbf{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	Нечетная	Возрастает	Рис. 258, в
$y = \operatorname{arcctg} x$	$\mathbf{R}$	$(0; \pi)$	Ни четная, ни нечетная	Убывает	Рис. 258, г

Графики сложных функций можно получать из графиков более простых функций определенными преобразованиями.

Из графика функции $y = f(x)$ получается график функции:

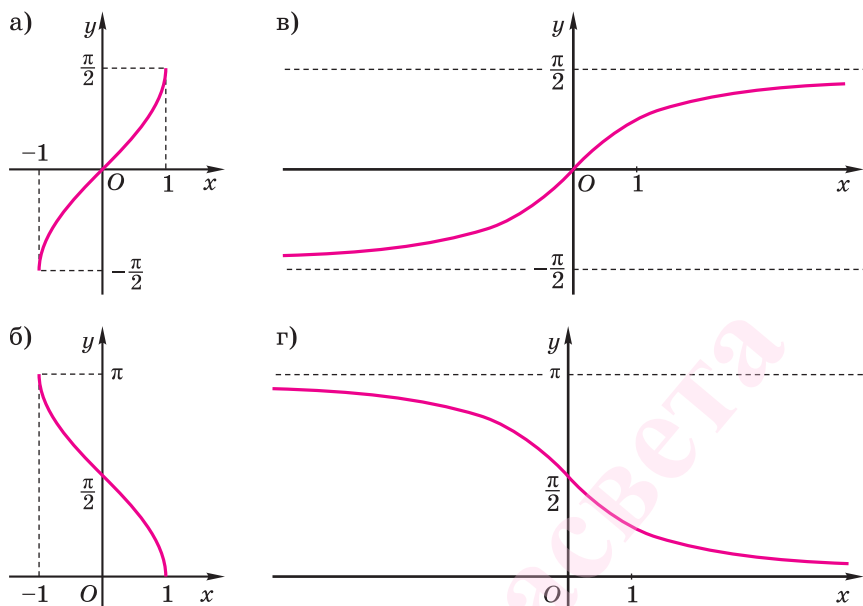


Рис. 258

- $y = f(x) + c$ сдвигом вдоль оси ординат на c единиц вверх, если $c > 0$ (рис. 259, а), и на $|c|$ единиц вниз, если $c < 0$ (рис. 259, б);

- $y = f(x + c)$ сдвигом вдоль оси абсцисс на c единиц влево, если $c > 0$ (рис. 259, в), и на $|c|$ единиц вправо, если $c < 0$ (рис. 259, г);

- $y = -f(x)$ симметричным отражением относительно оси абсцисс (рис. 259, д);

- $y = f(-x)$ симметричным отражением относительно оси ординат (рис. 259, е);

- $y = |f(x)|$ симметричным отражением относительно оси абсцисс его части, расположенной ниже этой оси (рис. 259, ж);

- $y = f(|x|)$ добавлением к графику функции $y = f(x)$ для $x \geq 0$ его симметричного отражения относительно оси ординат (рис. 259, з);

- $y = kf(x)$ растяжением от оси абсцисс в k раз, если $k > 1$ (рис. 259, и), и сжатием к этой оси в $\frac{1}{k}$ раз, если $0 < k < 1$ (рис. 259, к);

- $y = f(kx)$ сжатием к оси ординат в k раз, если $k > 1$ (рис. 259, л), и растяжением от этой оси в $\frac{1}{k}$ раз, если $0 < k < 1$ (рис. 259, м).

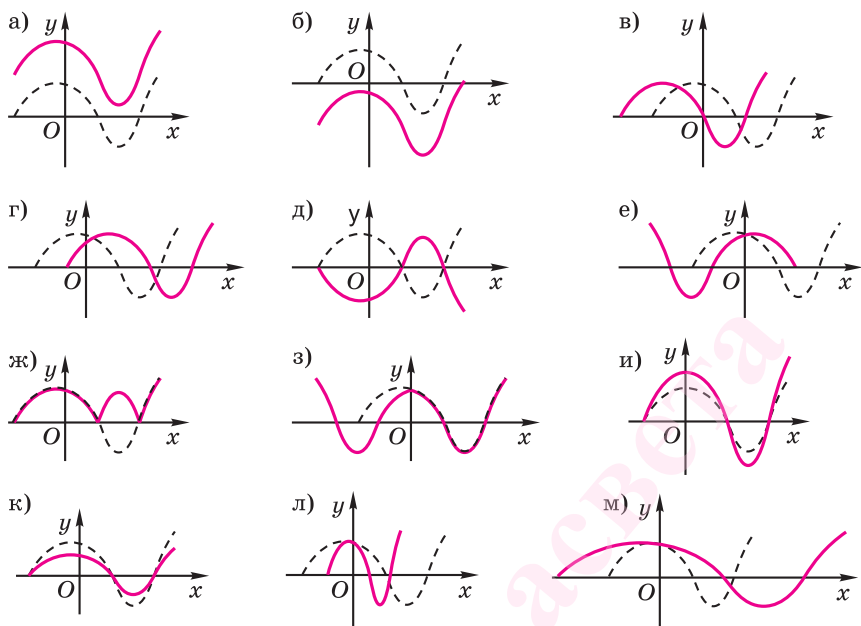


Рис. 259

Уравнение или неравенство с двумя переменными на координатной плоскости выделяет некоторое множество точек. Множествами точек координатной плоскости, задаваемыми уравнениями $2x + 3y = 6$ и $(u - 2)^2 + (v + 3)^2 = 16$, являются соответственно прямая и окружность, изображенные на рисунках 260 и 261. На рисунках 262, а, 262, б, 262, в, 262, г изображены множества решений неравенств $2x + 3y < 6$, $2x + 3y > 6$, $2x + 3y \leq 6$, $2x + 3y \geq 6$ соответственно, на рисунке 263 — множество решений неравенства $(u - 2)^2 + (v + 3)^2 < 16$, а на рисунке 264 — множество решений неравенства $rs \geq 4$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ при стремлении x_1 к x . Если тело движется по закону $s = s(t)$, то значение производной $s'(t)$ показывает мгновенную скорость тела в момент t . В этом заключается механический смысл производной. Геометрический смысл производной заключается в том, что производная $f'(c)$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой c (рис. 265).

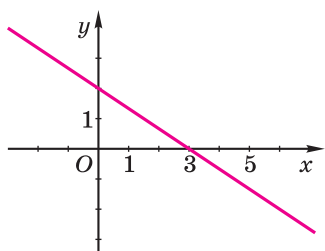


Рис. 260

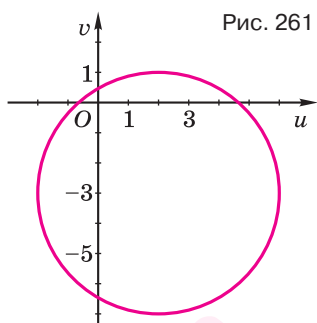


Рис. 261

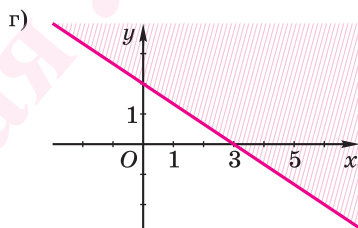
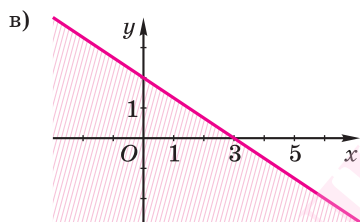
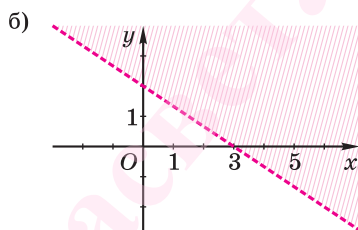
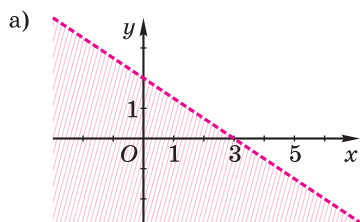


Рис. 262

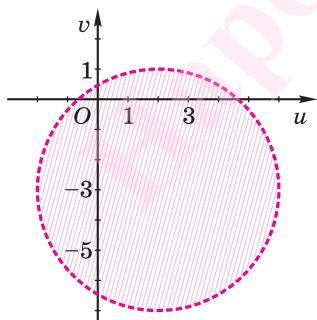


Рис. 263

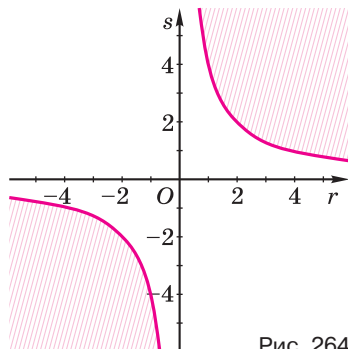


Рис. 264

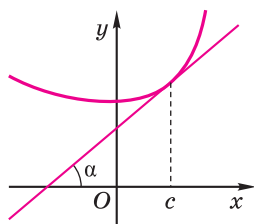


Рис. 265

Верны следующие формулы дифференцирования:

$c' = 0$	$(ax^2)' = 2ax$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\sin' x = \cos x$	$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(ax + b)' = a$	$(x^3)' = 3x^2$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos' x = -\sin x$	$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

При нахождении производных можно пользоваться следующими правилами:

$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(cu)' = cu'$	$(x^r)' = rx^{r-1}$
$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$(g(f(x)))' = g'(f(x)) f'(x)$

Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $f(x)$, если для всех значений переменной x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ (рис. 266). Точка x_0 называется *точкой минимума функции* $f(x)$, если для всех значений переменной x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$ (рис. 267). Значение функции в точке максимума называется *максимумом функции*, в точке минимума — *минимумом функции*. Точки максимума

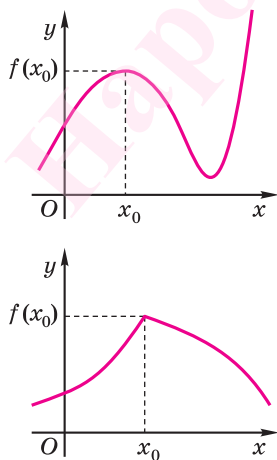


Рис. 266

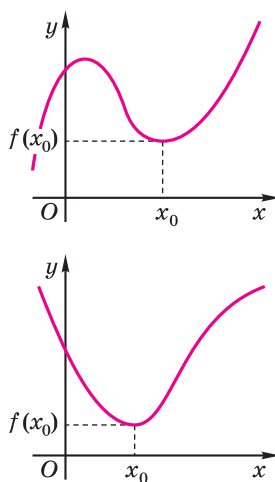


Рис. 267

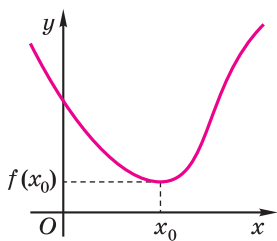


Рис. 268

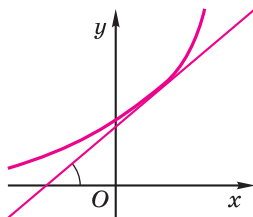
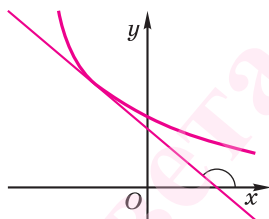
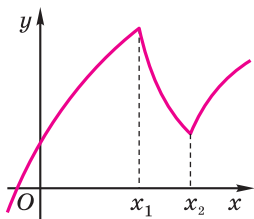


Рис. 269



и минимума вместе называют *точками экстремума*, а значения функции в этих точках — *экстремумами функции*. Свой экстремум функция может иметь в таких внутренних точках ее области определения, в которых производная равна нулю или не существует (рис. 268). Эти точки называются *критическими точками*.

Если функция $f(x)$ в каждой точке промежутка $(a; b)$ имеет производную и если эта производная положительна, то на промежутке $(a; b)$ функция $f(x)$ возрастает, а если эта производная отрицательна, то на промежутке $(a; b)$ функция $f(x)$ убывает (рис. 269).

Если при переходе через критическую точку производная функции меняет свой знак с плюса на минус, то эта критическая точка является точкой максимума, а если с минуса на плюс — точкой минимума (рис. 270).

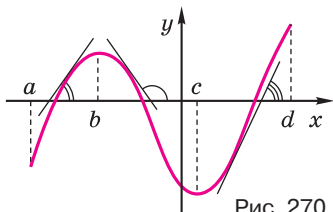


Рис. 270

Аргумент x	$(a; b)$	b	$(b; c)$	c	$(c; d)$
Производная y'	Положительна	Равна нулю	Отрицательна	Равна нулю	Положительна
Функция y	Возрастает ↗	Имеет максимум	Убывает ↘	Имеет минимум	Возрастает ↗

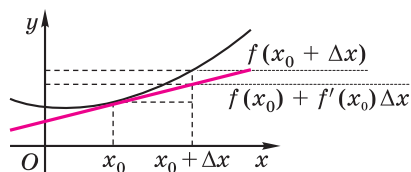


Рис. 271

к графику в точке x_0 (рис. 271). Поэтому верно приближенное равенство

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x, \text{ где } \Delta x = x - x_0.$$

Функция, областью определения которой является множество натуральных чисел или множество первых n натуральных чисел, называется *последовательностью*.

Арифметической прогрессией называется последовательность, в которой каждый следующий член получается прибавлением к предыдущему одного и того же числа d , которое называется *разностью прогрессии*. Последовательность (a_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда любой ее член, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Формулы

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \text{ и } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

дают возможность найти n -й член арифметической прогрессии и сумму n ее первых членов.

Геометрической прогрессией называется последовательность, в которой каждый следующий член получается из предыдущего умножением на одно и то же не равное нулю число q , которое называется *знаменателем прогрессии*. Последовательность (b_n) является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого ее члена, начиная со второго, равен произведению двух соседних с ним членов:

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}.$$

Для нахождения n -го члена геометрической прогрессии и суммы первых n ее членов можно использовать формулы:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \text{ и } S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Суммой членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q , $|q| < 1$, называется число $S = \frac{b_1}{1-q}$.



1. Как задать систему координат на прямой; на плоскости?
2. Как называются координаты точки координатной плоскости?
3. Как найти расстояние между точками координатной плоскости?
4. Какая зависимость между двумя переменными называется функцией и как называются эти переменные?
5. Какое множество называется областью определения функции; областью значений функции?
6. Что называется графиком функции?
7. Какое значение функции называется ее наибольшим (наименьшим) значением на данном промежутке?
8. Какая функция называется возрастающей (убывающей) на промежутке?
9. Какая функция называется четной; нечетной?
10. Какая функция называется периодической и какое число называется периодом функции?
11. Какая функция называется степенной; показательной; логарифмической?
12. Опишите основные свойства и нарисуйте графики простейших степенных функций: $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$.
13. Опишите основные свойства и нарисуйте графики простейших показательных функций: $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
14. Опишите основные свойства и нарисуйте графики простейших логарифмических функций: $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.
15. Какой вид имеет график степенной функции с рациональным показателем $\frac{m}{n}$, если m и n оба нечетны и: $\frac{m}{n} > 1$; $0 < \frac{m}{n} < 1$; $\frac{m}{n} < 0$?
16. Какой вид имеет график степенной функции с рациональным показателем $\frac{m}{n}$, если m — четное число, n — нечетное число и: $\frac{m}{n} > 1$; $0 < \frac{m}{n} < 1$; $\frac{m}{n} < 0$?
17. Какой вид имеет график степенной функции с рациональным показателем $\frac{m}{n}$, если m — нечетное число, n — четное число и: $\frac{m}{n} > 1$; $0 < \frac{m}{n} < 1$; $\frac{m}{n} < 0$?
18. Какой вид имеет график степенной функции с иррациональным показателем?
19. Какой вид имеет график показательной функции с большим единицы основанием; с положительным и меньшим единицы основанием?
20. Какой вид имеет график логарифмической функции с большим единицы основанием; с положительным и меньшим единицы основанием?

21. Какая функция называется линейной и какая линия является ее графиком?
22. Чем определяется угол между графиком линейной функции и положительным направлением оси абсцисс?
23. При каком условии графики двух линейных функций пересекаются; параллельны?
24. Какая функция называется квадратной и как ее коэффициенты определяют расположение графика на координатной плоскости?
25. Какая функция называется синусом; косинусом; тангенсом; котангенсом?
26. Опишите основные свойства и нарисуйте график синуса; косинуса; тангенса; котангенса.
27. Как из графика функции $y = f(x)$ получить график функции:
 $y = f(x) + c$; $y = f(x + c)$; $y = -f(x)$; $y = f(-x)$; $y = |f(x)|$; $y = f(|x|)$;
 $y = kf(x)$; $y = f(kx)$?
28. Какая функция называется последовательностью?
29. Какая последовательность называется арифметической прогрессией; геометрической прогрессией?
30. Как найти сумму n первых членов арифметической прогрессии; геометрической прогрессии?
31. Какая геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей и чему равна сумма ее членов?
32. Какая функция называется производной данной функции?
33. В чем заключается механический и геометрический смысл производной?
34. Какая точка называется точкой максимума функции и каков ее признак?
35. Какая точка называется точкой минимума функции и каков ее признак?
36. Сформулируйте признак возрастания функции на промежутке; признак убывания функции на промежутке.
37. Как найти наибольшее значение функции на промежутке; наименьшее значение функции на промежутке?

1096. Найдите расстояние между точками:

- а) $A(5; 7)$ и $B(-1; 15)$;
- б) $C(-6; 5)$ и $D(-1; -7)$;
- в) $E(0; 9)$ и $F(8; -6)$;
- г) $G(5; 17)$ и $H(-2; 41)$;
- д) $I(-5; 27)$ и $I(19; -5)$;
- е) $K(45; 21)$ и $L(-39; 8)$.

1097. Найдите площадь треугольника, вершины которого находятся в точках:

- а) $A(1; 7)$, $B(-4; -5)$ и $C(-6; -5)$;
- б) $D(-6; 15)$, $E(-1; 7)$ и $F(10; 9)$;
- в) $G(-6; 5)$, $H(7; -9)$ и $I(8; -6)$;
- г) $J(6; 1)$, $K(3; -7)$ и $L(2; -6)$.

1098. Найдите проведенную к большей стороне высоту треугольника, вершины которого находятся в точках:

- а) $A(1; -3)$, $B(4; 7)$ и $C(-6; -1)$;
 б) $D(-2; -5)$, $E(-1; -7)$ и $F(10; 2)$;
 в) $G(6; 3)$, $H(4; -9)$ и $I(-7; -5)$;
 г) $J(6; 11)$, $K(3; -7)$ и $L(2; -6)$.

1099. Определите, какая из зависимостей, заданных графиками, представленными на рисунке 272, является функцией.

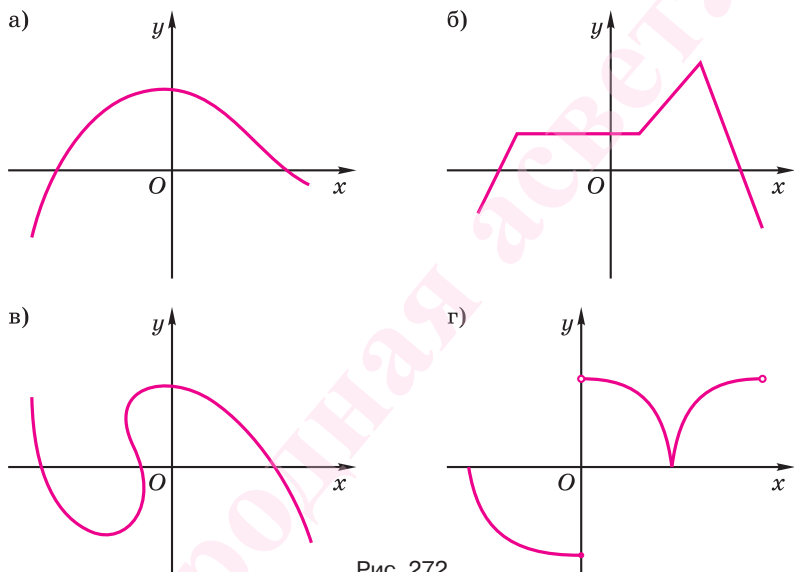


Рис. 272

1100. Укажите области определения и области значений функций, заданных графиками, приведенными на рисунке 273.

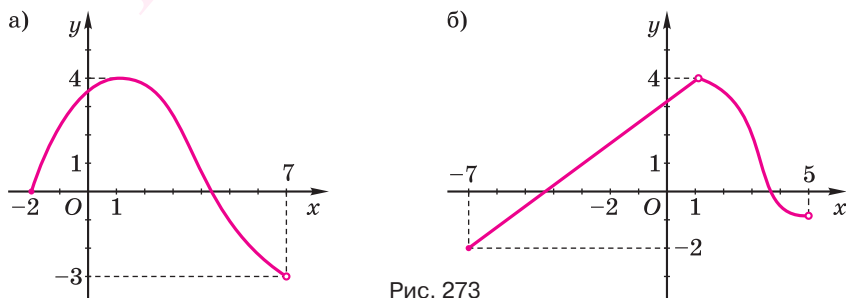


Рис. 273

1101. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt[6]{5^{3x-1} - 1}$;

г) $v = \log_7 \frac{(5l+10)(l-6)}{6+l}$;

б) $z = \sqrt[4]{1 - 7^{t^2} \cdot 49^t}$;

д) $S = 11 \sqrt[11]{\lg \frac{2r-r^2}{r+1}}$;

в) $u = 10 \sqrt[10]{\frac{4z-7}{(3-2z)(3z+6)}}$;

е) $w = \log_{y-2} \sqrt{\frac{(y-1)(4-y)}{5+y}}$.

1102. Найдите область определения функции:

а) $y = \operatorname{tg} \frac{x-\pi}{\frac{\pi}{2}+2x}$;

г) $v = \arccos 9\left(\frac{1}{3}\right)^{2l+5}$;

б) $z = \operatorname{ctg} \frac{t^2 - \pi t}{t+2}$;

д) $w = \sin \log_{\frac{1}{3}} \frac{3-2z}{(z+6)(1-z)}$;

в) $u = \arcsin \left(\frac{4}{11}\right)^{6z-3}$;

е) $T = \sqrt{\cos 2i + 5 \sin i + 2}$.

1103. Найдите область значений функции:

а) $z = -0,3 \sin 6r$;

в) $v = \frac{13-h^2}{3h+9}$;

д) $w = \frac{5l}{|l|} + 3^{|l|}$;

б) $u = \frac{1}{2} \sin 2i$;

г) $y = \frac{x^2 - x - 3}{2x^2 + 7x + 6}$;

е) $s = \frac{3r}{|r|} + 2^{|r|}$.

1104. Найдите область значений функции:

а) $x = \frac{18}{\pi} \arcsin \left(\frac{3(\sin t + \cos t)}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4} \right)$;

б) $y = \frac{6}{\pi} \arccos \left(\frac{1}{2} (\cos h - \sin h) \right)$;

в) $s = \frac{12}{\pi} \arccos \left(\frac{\sin r - \cos r + 3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \right)$;

г) $z = \frac{12}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{4} (\sqrt{3} \sin l - \cos l + 2) \right)$;

д) $u = \log_{\frac{1}{4}} \left(16 + \frac{\sqrt{4 \log_4^2 i}}{2} \right)$;

е) $v = \log_{\frac{1}{10}} \left(\frac{1 + \lg(100 + g^2)}{300} \right)$.

1105. Найдите область значений функции $z = \sin 2t$, учитывая, что значения переменной t принадлежат промежутку:

- а) $\left[\operatorname{arctg} \frac{1}{3}; \operatorname{arctg} 2 \right]$; в) $\left[\operatorname{arctg} \frac{1}{2}; \operatorname{arctg} 3 \right]$.
 б) $\left[\operatorname{arctg} \frac{4}{5}; \frac{5\pi}{12} \right]$;

1106. Укажите промежутки возрастания и промежутки убывания функций, представленных на рисунке 274.

1107. На промежутке $[0; 4\pi]$ определите, сколько промежутков возрастания и сколько промежутков убывания имеет функция:

- а) $y = 2\cos 2x + \sin^2 x$; в) $u = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 t}}{\cos t}$;
 б) $z = 2\sin^2 l + \cos 2l$; г) $z = \sqrt{1 - \cos^2 h} + \sin h$.

1108. Определите, сколько промежутков возрастания и сколько промежутков убывания имеет функция:

- а) $z = \sqrt{1 - \sin^2 x} + \cos x$ на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$;
 б) $y = \sin t \sqrt{\cos^2 t} + \cos x \sqrt{\sin^2 t}$ на промежутке $[-\pi; 3\pi]$.

1109. Определите, какой — четной, нечетной, ни четной и ни нечетной — является каждая из функций, графики которых приведены на рисунке 275.

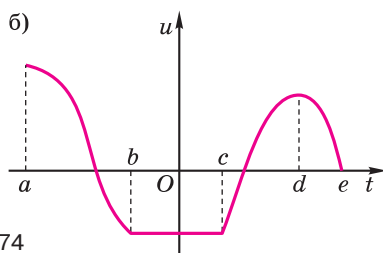
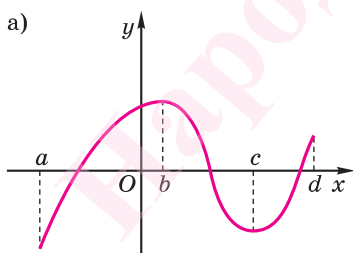


Рис. 274

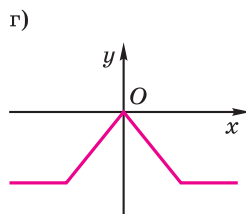
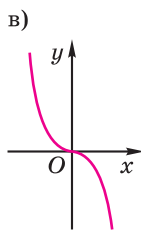
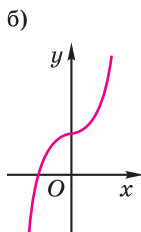
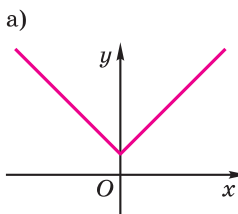


Рис. 275

1110. Из функций, графики которых приведены на рисунке 276, укажите четные.

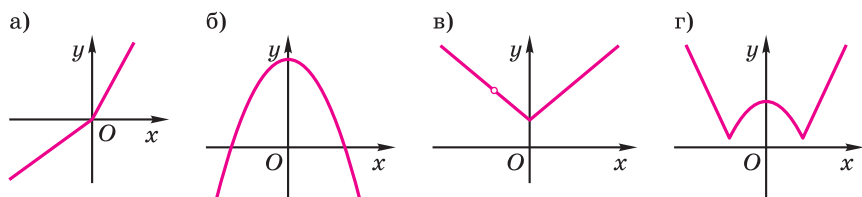


Рис. 276

1111. Из функций, графики которых приведены на рисунке 277, укажите четные.

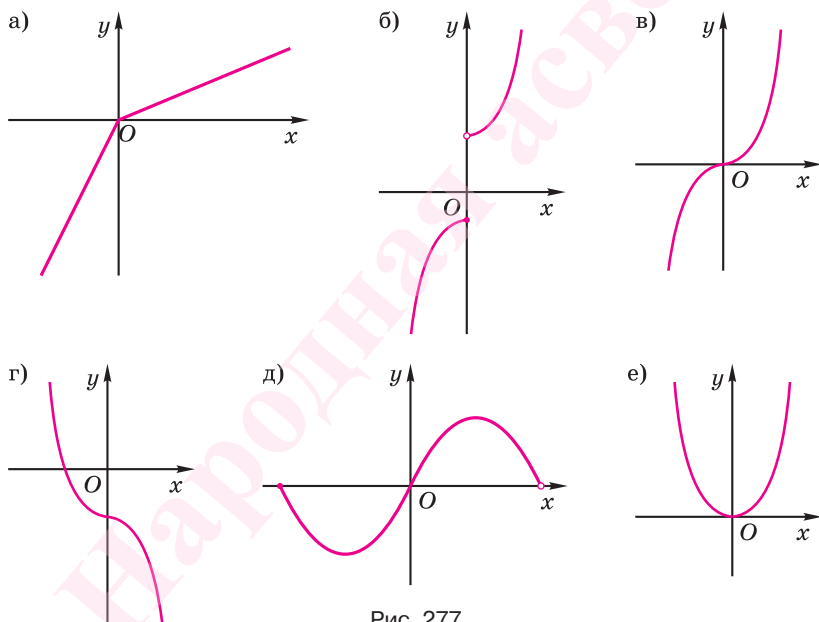


Рис. 277

1112. Определите, какой — четной, нечетной, ни четной и ни нечетной — является функция:

а) $y = x^2 - 4x^4 - 5$;

е) $f = \operatorname{ctg} 5t + \arcsin t$;

б) $z = u^3 + 5u^5 - 5u$;

ж) $g = \arcsin s + 2 \operatorname{arctg} 3s - 1$;

в) $u = t + 5t^4 - 5u^3$;

з) $h = \arcsin^4 s + \operatorname{ctg}^2 3s - 1$;

г) $y = \sin z + \operatorname{tg} 2z$;

и) $r = \arccos i - \operatorname{arctg} i$.

д) $v = \sin^2 2t - \cos 3z$;

1113. Из графиков, представленных на рисунке 278, укажите тот, который является графиком функции:

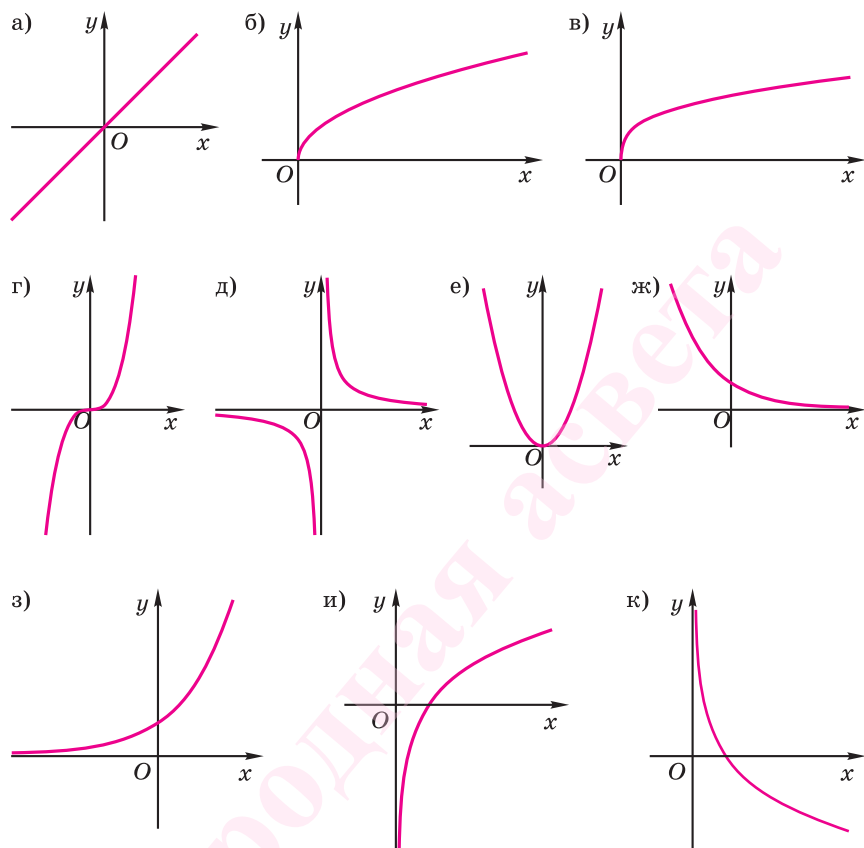


Рис. 278

- | | | | |
|---------------------------------|------------------------|---------------------------------------|------------------------|
| а) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; | г) $y = x^3$; | ж) $y = \log_2 x$; | к) $y = \frac{1}{x}$. |
| б) $y = x^{\frac{2}{2}}$; | д) $y = x$; | з) $y = 2^x$; | |
| в) $y = \sqrt{x}$; | е) $y = \sqrt[3]{x}$; | и) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; | |

1114. Из графиков, представленных на рисунке 279, укажите тот, который является графиком функции:

- | | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|--------------------|
| а) $y = x^{\frac{12}{5}}$; | г) $y = x^{\frac{3}{5}}$; | ж) $y = x^{\frac{4}{5}}$; | к) $y = x^{6,5}$. |
| б) $y = x^{\frac{15}{8}}$; | д) $y = x^{\frac{3}{5}}$; | з) $y = x^{\frac{5}{8}}$; | |
| в) $y = x^{\frac{12}{5}}$; | е) $y = x^{\frac{15}{8}}$; | и) $y = x^{\frac{11}{5}}$; | |

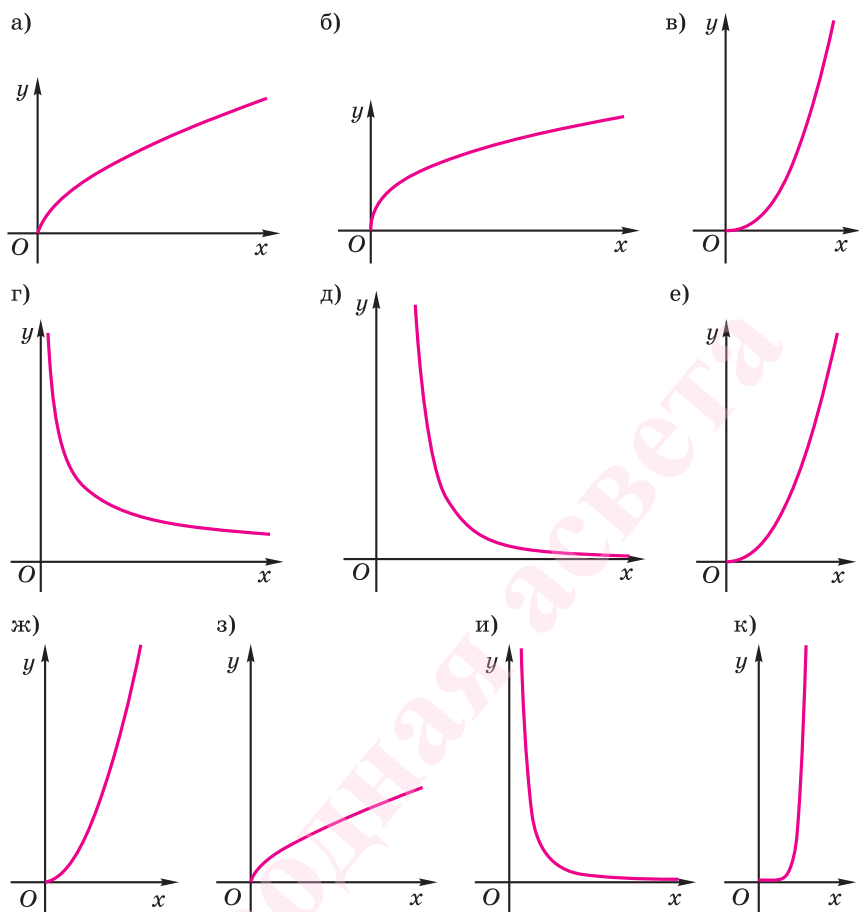


Рис. 279

1115. Из графиков, представленных на рисунке 280, укажите тот, который является графиком функции:

- а) $y = x^{\frac{3}{7}}$; в) $y = \log_{\frac{3}{7}} x$; д) $y = x^{\frac{1}{\frac{3}{7}}}$; ж) $y = \log_{\frac{7}{3}} x$;
 б) $y = \left(\frac{7}{3}\right)^x$; г) $y = x^{\frac{2}{\frac{3}{7}}}$; е) $y = \left(\frac{3}{7}\right)^x$; з) $y = x^{-\frac{2}{\frac{3}{7}}}$.

1116. Определите взаимное расположение на плоскости линий, заданных уравнениями:

- а) $3x + 2y - 7 = 0$ и $9x + 6y - 20 = 0$;
 б) $-3u + 4v + 5 = 0$ и $6u - 8v - 2 = 0$;

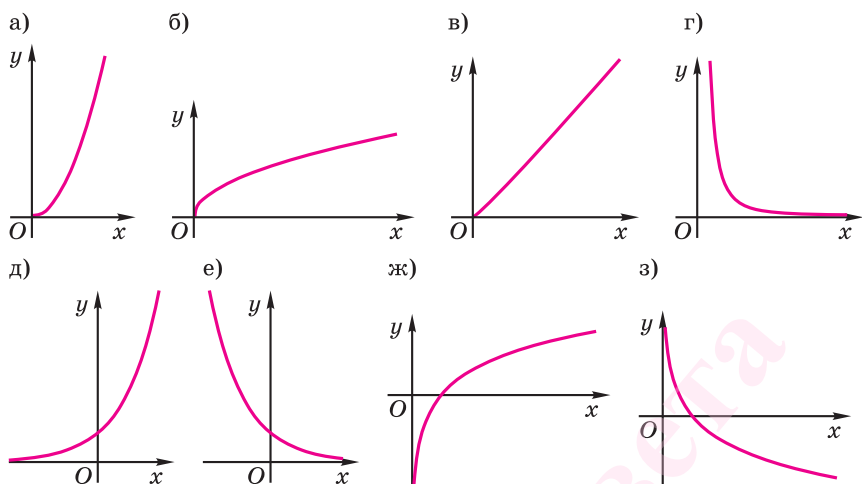


Рис. 280

- в) $3r - s = 3$ и $(r - 3)^2 + (s - 2)^2 = 2$;
 г) $3g + 4h = 25$ и $g^2 + h^2 = 25$;
 д) $3g + 4h = 25$ и $g^2 + h^2 = 25$;
 е) $(i - 8)^2 + (j + 17)^2 = 25$ и $i^2 + j^2 = 169$.

1117. Найдите точки пересечения прямой $2x - 5y - 15 = 0$ с координатными осями.

1118. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $M(a; b)$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол α , учитывая, что:

- а) $M(1; 2)$ и $\alpha = \frac{\pi}{4}$; в) $M(-1; -3)$ и $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$.
 б) $M(5; 0)$ и $\alpha = \frac{3\pi}{4}$;

1119. Найдите уравнение прямой, которая:

- а) параллельна прямой $y = 3x + 2$ и проходит через точку $A(-2; 3)$;
 б) перпендикулярна прямой $y = -5x + 3$ и проходит через точку $C(4; 5)$;
 в) проходит через точку $B(2; 1)$ и перпендикулярна прямой, проходящей через точки $U(3; -4)$ и $V(5; 3)$.

1120. Найдите точку M , симметричную точке $A(-5; 13)$ относительно:

- а) начала координат; в) прямой $2x - 3y = 3$.
 б) точки $S(-1; 1)$;

1121. Найдите уравнение прямой, параллельной прямым $2x + 3y - 6 = 0$ и $4x + 6y + 17 = 0$ и равноудаленной от них.

1122. Найдите уравнение окружности, учитывая, что:

- а) ее центр находится в точке $A(2; -7)$, а радиус равен 7;
- б) она проходит через точку $B(2; 6)$, а центр находится в точке $C(-1; 2)$;
- в) один из ее диаметров имеет концами точки $D(-1; 6)$ и $E(3; 2)$;
- г) она касается прямой $3x - 4y = 25$, а центр находится в начале координат;
- д) она проходит через точки $F(-1; 3)$ и $G(3; 1)$, а центр лежит на прямой $3x - y - 2 = 0$.

1123. Найдите квадратный трехчлен, учитывая, что:

- а) его наибольшее значение 3 достигается при значении переменной, равном 2, а график заданной им функции проходит через начало координат;
- б) его свободный член равен 1, а график заданной им функции проходит через точку $A(2; 7)$ и симметричен относительно прямой $x + 2 = 0$;
- в) график заданной им функции проходит через точки $A(-2; 2)$ и $B(2; 26)$ и симметричен относительно прямой $x + 1 = 0$;
- г) график заданной им функции проходит через точки $A(2; -1)$ и $B(-4; 47)$ и симметричен относительно прямой $x - 1 = 0$.

1124. График функции, заданной квадратным трехчленом, наименьшее значение 0 которого достигается при значении аргумента, равном 1, проходит через точку $F(-1; 4)$. Найдите уравнения касательных к этому графику, проходящие через начало координат.

1125. Постройте графики неравенств $y > \frac{1}{x}$ и $xy > 1$ и объясните, чем они отличаются.

1126. Составьте уравнение касательной к гиперболе $y = \frac{1}{x}$, параллельной прямой $y + 4x = 1$.

1127. На одном рисунке постройте графики уравнений:

- а) $y = x^2$; $y = (x - 3)^2$; $y = (x - 3)^2 - 2$;
- б) $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{1}{x+2}$; $y = \frac{1}{x-2}$;
- в) $x^2 + y^2 = 4$; $(x - 1)^2 + y^2 = 4$; $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$.

1128. Постройте график уравнения:

- а) $y = x^2 - 3x + 4$; г) $y = \frac{4x+3}{2x-1}$;
б) $y = 2x^2 + 7x - 14$; д) $x^2 - 6x + y^2 + 2y - 6 = 0$;
в) $y = \frac{3x-4}{x+1}$; е) $(x-1)(y+2) = 2x-3$.

1129. Найдите уравнение окружности с центром $A(-1; 2)$, в которую при движении преобразуется окружность:

- а) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$; б) $x^2 - 4x + y^2 + 6y = 0$.

1130. Запишите уравнение параболы, в которую преобразуется парабола $y = x^2 + 2x + 2$ таким параллельным сдвигом, что ее вершина оказывается в точке:

- а) $A(0; 0)$; б) $B(-3; 4)$; в) $C(1; -1)$.

1131. Запишите уравнение гиперболы, в которую преобразуется гипербола $y = \frac{1}{x}$ таким параллельным сдвигом, что ее центр симметрии оказывается в точке $D(-3; 2)$.

1132. На одном рисунке постройте графики уравнений:

- а) $y = 2 + x$; $y = 2 - x$; $y = -(2 + x)$;
б) $y = x^2 + 2x$; $y = x^2 - 2x$; $y = -(x^2 + 2x)$;
в) $y = \frac{1}{2+x}$; $y = \frac{1}{2-x}$; $y = -\frac{1}{x+2}$;
г) $y = \frac{2x+1}{x}$; $y = \frac{2x-1}{x}$; $y = -\frac{2x+1}{x}$;
д) $(x-1)^2 + y^2 = 1$; $(x+1)^2 + y^2 = 1$.

1133. На одном рисунке постройте графики уравнений:

- а) $y = x^2$; $y = (2x)^2$; $2y = x^2$;
б) $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{3}{x}$; $3y = \frac{1}{x}$;
в) $x^2 + y^2 = 4$; $(2x)^2 + y^2 = 2$; $x^2 + \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = 4$; $(2x)^2 + \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = 4$;
г) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$; $4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$.

1134. Постройте график неравенства:

- а) $4(x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 9$;
б) $\frac{1}{9}u^2 + v^2 - 4v < 0$;
в) $2p^2 + 5q^2 + 4p - 10q + 5 \leq 0$.

1135. Постройте график системы неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} xy > 2, \\ x^2 + 4x + \frac{1}{4}y^2 \leq 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{(u-1)^2}{4} + \frac{(v+1)^2}{9} \leq 1, \\ \frac{(u-1)^2}{9} + \frac{(v+1)^2}{4} > 1. \end{cases}$$

1136. На одном рисунке постройте графики уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } y &= \frac{1}{x}; \quad y = \frac{1}{|x|}; \quad |y| = \frac{1}{x}; \quad |y| = \frac{1}{|x|}; \\ \text{б) } y &= 2^x; \quad y = 2^{|x|}; \quad |y| = 2^x; \quad |y| = 2^{|x|}; \\ \text{в) } y &= x^3; \quad y = |x|^3; \quad |y| = x^3; \quad |y| = |x|^3; \\ \text{г) } y &= \log_2 x; \quad y = \log_2 |x|; \quad |y| = \log_2 x; \quad |y| = |x|. \end{aligned}$$

1137. На одном рисунке постройте графики уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } y &= x; \quad y = \frac{1}{x}; \quad y = x + \frac{1}{x}; & \text{г) } y &= x^2; \quad y = \frac{1}{x^2}; \quad y = x^2 + \frac{1}{x^2}; \\ \text{б) } y &= x; \quad y = \sin x; \quad y = x + \sin x; & \text{д) } y &= 2x - x^2; \quad y = \frac{1}{2x - x^2}; \\ \text{в) } y &= x^2; \quad y = -\frac{1}{x}; \quad y = x^2 - \frac{1}{x}; & \text{е) } y &= 1 + x^2; \quad y = \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

1138. Постройте графики уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } y &= x + |x| + 1; & \text{в) } y &= \frac{x^3 - 1}{x^2}; \\ \text{б) } y &= x \cdot |x - 1|; & \text{г) } y &= \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}. \end{aligned}$$

1139. Постройте графики уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } y &= 2(x-2)^2 + 2; & \text{е) } w &= \frac{k^2}{k-1}; \\ \text{б) } x &= 4t - t^2 - 6; & \text{ж) } 3(i-1)^2 + 4(j+1)^2 &= 0; \\ \text{в) } r &= \frac{2l-3}{l-2}; & \text{з) } 2r^2 + s^2 + 8r + 2s + 7 &= 0; \\ \text{г) } s &= -\frac{1}{(j-1)^2}; & \text{и) } (a+2)^2 + 4(b-3) &= 16; \\ \text{д) } z &= \frac{1}{y^2 - 1}; & \text{к) } c^2 - cd + 1 &= 0. \end{aligned}$$

1140. Найдите уравнение прямой, которая проходит через точку:

- а) $A(2; 1)$ и пересекает параболу $y = x^2 - 4x$ в точках, сумма квадратов абсцисс которых наименьшая;
- б) $B(1; 5)$ и пересекает параболу $y = x^2 + x + 1$ в точках, сумма ординат которых наименьшая;
- в) $C(1; -3)$ и пересекает параболу $y = -x^2 + 2x$ в точках, сумма ординат которых наибольшая.

1141. Найдите длину перпендикуляра, опущенного из точки:

- а) $A(3; -1)$ на прямую, пересекающую гиперболу $y = \frac{4+x}{6-x}$ в точках, ординаты которых равны 1 и $\frac{2}{3}$;
- б) $B(5; 0)$ на касательную к параболе $y = x^2 + 3$, проведенную через точку $C(0; 1)$.

1142. Найдите точку:

- а) оси ординат, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции $y = x^2 - 2x + 6$;
- б) прямой $2x - 3y = 6$, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции $y = \frac{1}{4}x^2$.

1143. Есть точки $A(1; 3)$ и $B(5; 2)$. На прямой, проходящей через точки $C(-3; 1)$ и $D(4; -6)$, найдите такую точку F , чтобы сумма отрезков FA и FB была наименьшей.

1144. Есть точка $A(5; 7)$ и угол, стороны которого лежат на прямых $y = 0$ и $y = x + 5$. На сторонах этого угла найдите такие точки B и C , чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим.

1145. Найдите уравнения касательных к параболам $y = 2x^2 - 5$ и $y = x^2 - 3x + 5$, проходящих через точки их пересечения.

1146. Найдите площадь треугольника, образованного:

- а) двумя касательными к графику уравнения $y = 2x^2 + 4x + 4$, проведенными через точки с абсциссами, равными -1 и 1 , и прямой, проходящей через точки касания;
- б) тремя касательными к графику функции $y = x^2 - 4x + 3$, проведенными через точки с абсциссами, равными -2 , 2 и 4 .

1147. Докажите, что функция:

- а) $y = x^3 + 2x^2 + 5x$ возрастает в области определения;
б) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ убывает на промежутке $(-2; 1)$.

1148. Найдите промежутки возрастания и промежутки убывания функции:

- а) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$; г) $y = 2x + \frac{2}{x}$;
б) $y = x^4 - 2x^2 - 5$; д) $y = \sin x + \cos 2x$;
в) $y = x - 2 \sin x$; е) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$.

1149. Найдите критические точки функции:

- а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$; г) $s = \cos r \cos 2r$;
б) $w = \frac{z}{3} + \frac{3}{z}$; д) $u = \operatorname{tg} l + \operatorname{ctg} 2l$;
в) $z = h + 8 \sin h - 5 \cosh$; е) $v = \sin^2 t + 3\sqrt{t^2 - 4t + 4} + \cos 1$.

1150. В точках экстремума найдите значения функции:

- а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$; е) $z = \frac{2h}{h^2 + 9}$;
б) $c = 2l^3 - 6l^2 - 18l + 7$; ж) $u = \frac{j^2 - 2j + 1}{j - 1}$;
в) $d = \frac{1}{3}i^3 - i^2 - 3i$; з) $f = \sqrt{2a^2 - a + 2}$;
г) $f = v^5 - 5v^4$; и) $g = \sin 2r$;
д) $w = \frac{1}{4}(j - 2)^2(j + 4)$; к) $h = c + \sin 2c$.

1151. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

- а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$ на промежутке $[-5; 4]$;
б) $w = \frac{4}{3}a^3 - 4a$ на промежутке $[0; 2]$;
в) $z = 2l^3 - 9l^2 + 12l$ на промежутке $[0; 3]$;
г) $u = \frac{1}{3}j^3 - \frac{3}{2}j^2 + 1$ на промежутке $[-1; 1]$;
д) $v = p^4 - 4p^2$ на промежутке $[-3; 3]$;
е) $w = q^4 - 2q^2 - 5$ на промежутке $[0; 2]$;
ж) $q = \frac{y}{8} + \frac{2}{y}$ на промежутке $[1; 6]$;
з) $r = \frac{h}{-h^2 + h - 1}$ на промежутке $[-2; 2]$.

1152. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = \frac{4}{(t-2)^2} + t$ на промежутке $[0; 5]$;

б) $w = \sqrt{100 - b^2}$ на промежутке $[-6; 8]$;

в) $z = \sqrt{l^2 - l - 2}$ на промежутке $[3; 5]$;

г) $u = \sqrt[3]{\frac{j^2}{2j-1}}$ на промежутке $\left[\frac{3}{4}; 2\right]$;

д) $v = i^2 - 6i + 10 - 9\sqrt[3]{(i-3)^4} + 27\sqrt[3]{(i-3)^2}$ на промежутке $[-5; 4]$;

е) $w = \sin h + \cos 2h$ на промежутке $[0; \pi]$;

ж) $q = \cos 3y - 15 \cos y + 8$ на промежутке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

з) $r = -x^3 + 7|x| - 12$ на промежутке $[-4; 3]$;

и) $s = 4y^3 - y|y - 2|$ на промежутке $[0; 3]$.

1153. Найдите наибольшее значение функции:

а) $y = \log_2 x - \log_2 (x^2 + 9x + 9)$;

б) $z = \frac{l+3}{l^2+6l+18}$;

в) $w = \sin^3 \frac{1}{l} - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{1}{l} + 2$.

1154. Постройте график функции:

а) $y = a^3 - 9a + 8$;

г) $u = (c-1)c^2$;

ж) $f = 2t \sin 2t$;

б) $z = x^4 - 2x^4 + 5$;

д) $v = \frac{h^2}{h-2}$;

з) $g = \cos 2b + \sin b$;

в) $w = \frac{1}{6}l^6 - \frac{3}{4}l^4 - 5$;

е) $w = \frac{y^3}{1-y^2}$;

и) $h = \sin j - \operatorname{ctg} j$.

1155. Решите уравнение:

а) $\cos 2x = 1 + x^2$;

б) $y^4 - 2y^2 = 1 - \cos^2 y$;

в) $27 \cdot 4^t + 7 \cdot 9^t = 15 \cdot 25^t$.

1156. Решите уравнение:

а) $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5$;

б) $|x^2 - 1| - |x^2 - 4| = 3$;

в) $|x^2 - 1| + |x^2 - 10| + |x^2 - 19| = 24$;

г) $|x^2 - 1| + |x^2 - 5| + |x^2 - 8| + |x^2 - 16| = 20$.

1157. Решите уравнение:

- а) $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$; в) $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 1 = 0$;
б) $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$; г) $x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 7x + 1 = 0$.

1158. Решите уравнение:

- а) $x^4 + (1 - x)^4 = 97$; в) $x^3 = 3x^2 - 4$;
б) $(5 - x)^4 + (2 - x)^4 = 17$; г) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 24$.

1159. Нарисуйте линию, заданную уравнением:

- а) $y = -2x + 1,5$; в) $y = \frac{5}{x}$; д) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 9$;
б) $2y - 3t = 1$; г) $xz = -12$; е) $x^2 - 4x + 5 + y^2 = 2$.

1160. Определите, в какой полуплоскости по отношению к прямой $2x + 3y = 5$ находится точка:

- а) $O(0; 0)$; б) $A(-3; 2)$; в) $B(4; 6)$; г) $C(0; 10)$.

1161. На прямой, которой принадлежат точки $A(-3; 8)$ и $B(3; -7)$, найдите точку с:

- а) абсциссой 1; в) ординатой 13;
б) абсциссой -2; г) ординатой -10.

1162. Докажите, что функция $y = \sin x$ на промежутке:

- а) $[0; \pi]$ выпуклая, т. е. $\frac{\sin a + \sin b}{2} < \sin \frac{a + b}{2}$, если $0 \leq a, b \leq \pi$;
б) $[\pi; 2\pi]$ вогнутая, т. е. $\frac{\sin a + \sin b}{2} > \sin \frac{a + b}{2}$, если $\pi \leq a, b \leq 2\pi$.

1163. Найдите уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек:

- а) $A(-1; 3)$ и $B(3; -1)$; б) $K(3; 3)$ и $L(-1; 5)$.

1164. Найдите точку пересечения прямых:

- а) $x + 2y = 5$ и $2x + 3y = 8$; б) $2a - 5b = 3$ и $4a + 10b = 6$.

1165. Найдите угловой коэффициент прямой, которая:

- а) задана уравнением $2x + 3y = -1$;
б) содержит точки $U(-2; 3)$ и $V(0; 1)$;
в) задана уравнением $y = -3$.

1166. Запишите уравнение:

- а) прямой, проходящей через точки $M(-3; 2)$ и $N(2; -3)$;
б) прямой с угловым коэффициентом -2 , проходящей через точку $K(-2; 3)$;

в) окружности с радиусом 7, центр которой находится в точке $A(4; -3)$;

г) окружности, которая проходит через точку $A(2; 2)$ и центр которой находится в точке $B(-1; -2)$.

1167. Докажите, что уравнением прямой, проходящей через точку $A(x_0; y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k , является уравнение $y - y_0 = k(x - x_0)$.

1168. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $S(-2; -3)$ и имеющей угловой коэффициент:

- а) -3 ; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{3}$; г) 4 ; д) 0 .

1169. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $T(-2; -1)$, луч которой, расположенный выше оси абсцисс, образует с положительным направлением этой оси угол, равный:

- а) 30° ; в) 60° ; д) 120° ; ж) 150° ; и) β .
б) 45° ; г) 90° ; е) 135° ; з) 15° ;

1170. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $X(3; -2)$ и:

- а) параллельной оси абсцисс;
б) параллельной оси ординат;
в) образующей с осью абсцисс угол в 45° ;
г) образующей с осью ординат угол в 60° ;
д) параллельной прямой $y = -x + 2$;
е) перпендикулярной прямой $y = x$.

1171. Запишите уравнение окружности с радиусом:

- а) $2\sqrt{2}$, проходящей через точки $C(-3; 3)$ и $D(1; -1)$;
б) $4\sqrt{5}$, проходящей через точки $E(-12; -4)$ и $F(4; -4)$.

1172. Найдите точку, равноудаленную от точек $A(-3; -2)$ и $B(3; 2)$ и лежащую на:

- а) прямой $y = -x$; в) окружности $x^2 + y^2 = 9$;
б) прямой $y = -x - 2$; г) окружности $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

1173. Найдите середины сторон треугольника, вершины которого находятся в точках:

- а) $A(3; -7)$; $B(5; 2)$; $C(-1; 0)$;
б) $E(10; 3)$; $F(-5; 13)$; $G(-1; -10)$.

1174. Найдите медианы треугольника, вершины которого находятся в точках:

- а) $I(3; -7); J(5; 2); K(-1; 0);$ б) $L(3; -2); M(5; 2); N(-1; 4).$

1175. Точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ являются смежными вершинами ромба, диагонали которого параллельны координатным осям. Найдите координаты двух других вершин ромба.

1176. Точки $I(-4; -7), J(2; 6)$ и $A(3; 1)$ являются смежными вершинами параллелограмма и точкой пересечения его диагоналей соответственно. Найдите координаты двух других вершин параллелограмма.

1177. Найдите координаты:

- а) точек, разделяющих отрезок с концами $B(3; 2)$ и $C(18; 7)$ на 5 долей;
б) точки пересечения медиан треугольника, вершины которого находятся в точках $F(1; 4), G(-5; 0)$ и $H(-2; -1);$
в) точки пересечения общих касательных к окружностям с центрами $Q(4; 3)$ и $O\left(\frac{28}{3}; \frac{25}{3}\right)$ и радиусами, равными 3 и 7 соответственно.

1178. Точка $F(3; -6)$ является вершиной общего угла двух подобных треугольников с коэффициентом подобия, равным 2,5. Найдите координаты двух других вершин меньшего треугольника, учитывая, что вершины большего находятся в точках $G(11; 0)$ и $H(8; 11,5).$

1179. Найдите координаты центра тяжести:

- а) системы, состоящей из трех грузов массами 40 г, 60 г и 100 г, находящихся в точках $A(4; 2), B(9; -0,5)$ и $C(8; 5)$ соответственно;
б) четырехугольной однородной пластинки, вершины которой находятся в точках $A(5; 3), B(6; 6), C(11; 9)$ и $E(13; 3);$
в) тела в виде прямого угла со сторонами a и b , полученного в результате сгибания однородной проволоки.

1180. Прямая проходит так, что отсекает на оси абсцисс отрезок OA длиной 4 единицы, а на оси ординат — отрезок длиной 7 единиц. Найдите координаты основания перпендикуляра, опущенного на эту прямую из начала координат.

1181. Найдите угол между прямыми:

- а) $2x - 3y = -6$ и $x - 2y = 11;$ б) $3a + 2b = 6$ и $2a - b = -10.$

1182. На сторонах PQ и PS квадрата $PQRS$ точки A и B выбраны так, что $3AQ = 2PB = RS$. Найдите угол между прямыми AR и BQ .

1183. Найдите расстояние до прямой $4x - 3y = -6$ от точки:

- а) $C(8; 6)$; б) $D(-5; 8)$; в) $E(6; -3)$; г) $F(-4; -6)$.

1184. Найдите уравнение геометрического места точек, равноудаленных от прямых:

- а) $4x + 3y = 7$ и $4x - 3y = 1$; в) $5x + 12y = -7$ и $12x + 5y = 7$;
б) $x + 2y = 5$ и $4x + 2y = 23$; г) $3x + 2y = 15$ и $2x + 3y = 10$.

1185. Найдите радиусы окружностей, вписанной в треугольник и описанной около треугольника, вершины которого находятся в точках:

- а) $C(-8; -10)$; $D(-1; 14)$; $E(9; -10)$;
б) $G(-12; -16)$; $H(8; 32)$; $I(44; -16)$.

1186. Вершины треугольника находятся в точках $A(-4; 7)$, $B(4; 1)$, $C(7; 5)$. Найдите:

- а) стороны треугольника;
б) углы треугольника;
в) площадь треугольника;
г) медианы треугольника и координаты их оснований;
д) высоты треугольника и координаты их оснований;
е) биссектрисы треугольника и координаты их оснований;
ж) центры и радиусы окружностей — вписанной в треугольник и описанной около него.

1187. Упростите выражение

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{a-1}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a-1}} \right) \cdot (\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1})^{-1}.$$

1188. Найдите все значения переменной m , при которых один корень уравнения $(2 - m)x^2 + 2mx + 8 - m^2 = 0$ больше 2, а другой меньше 2.

1189. Нарисуйте окружность и отметьте ее центр. С помощью только циркуля впишите в нее квадрат, обратив внимание на то, что треугольник со сторонами 1 , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ является прямоугольным.

1190. Нарисуйте окружность с радиусом R и впишите в нее правильный треугольник. В полученный треугольник впишите окружность, в которую впишите квадрат. Наконец, в этот квадрат впишите окружность, в которую впишите правильный шестиугольник и в него снова впишите окружность. Найдите радиус последней окружности. Изменится ли ответ на вопрос задачи, если последовательность вписанных многоугольников станет обратной: сначала шестиугольник, затем квадрат и, наконец, треугольник?

1191. Докажите, что биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника с углом против основания в 36° разделяет этот треугольник на два равнобедренных треугольника, из которых один подобен данному треугольнику. Учитывая это:

- а) найдите значения тригонометрических функций угла, равного 18° ;
- б) выразите сторону правильного десятиугольника через радиус описанной окружности;
- в) выразите сторону правильного пятиугольника через радиус описанной окружности;
- г) постройте правильный десятиугольник, вписанный в окружность;
- д) постройте правильный пятиугольник, вписанный в окружность.

1192. Докажите, что:

- а) если все углы вписанного многоугольника с нечетным количеством сторон равны, то этот многоугольник правильный;
- б) если все стороны описанного многоугольника с нечетным количеством сторон равны, то этот многоугольник правильный.

1193. Есть многоугольник, все углы которого равны друг другу. Докажите, что сумма расстояний от произвольной внутренней точки этого многоугольника до его сторон есть величина постоянная.

1194. Найдите:

- а) разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2 + |x| = \frac{11}{16}$;

б) количество положительных корней уравнения $x^2 \cdot 3^x + 9 = 3^{x+2} + x^2$;

в) сумму корней уравнения $\frac{6}{4 + \sqrt{5x - 8}} + 2 = \frac{3}{-1 + \sqrt{5x - 8}}$;

г) количество и сумму корней уравнения

$$\log_{0,1x} \frac{0,1}{x} + \frac{1}{\log_x 0,1} = 1.$$

1195. Найдите значение выражения $\frac{\cos 4\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha - \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha + \sin 4\alpha}$, учитывая, что $\operatorname{ctg} \alpha = 0,5$.

1196. Определите:

а) во сколько раз увеличится площадь правильного пятиугольника, если его сторону увеличить на 20 %;

б) на сколько процентов нужно увеличить ребро правильного октаэдра, чтобы его объем увеличился на 33,1 %.

1197. Найдите площадь треугольника ABC , учитывая, что $AB = 25$ см, $BC = 39$ см и $\cos A = -0,8$.

1198. Найдите:

а) количество целых решений неравенства

$$\frac{1}{x^2 + 6x + 9} \leq \frac{5x + 4}{(x^2 + 8x + 15)(x^2 + 3x)};$$

б) сумму целых решений неравенства

$$\lg^2(x + 6) - \lg(x + 6) \cdot \lg x \geq 2\lg^2 x.$$

* * *

1199. В треугольнике ABC отрезки CH и CK — соответственно высота и биссектриса. Точка N выбрана на стороне BC так, что HN параллельна AC . Считая, что NK перпендикулярна BC , докажите, что $AK = CK$.

1200. Докажите, что если числа a , b и c удовлетворяют условиям $ab + bc + ca = 1$ и $\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} = 0$, то по крайней мере одно из них равно нулю.

1201. Установите, можно ли числа 1, 2, 3, ..., 13 расставить по окружности так, чтобы два любых соседних числа отличались на 3, 4 или 5.

23. Геометрические фигуры и их свойства

Основное содержание школьной геометрии связано с соответствующими геометрическими конфигурациями — простейшими геометрическими фигурами или их сочетаниями. Опишем их.

Прямые в пространстве

Две прямые a и b могут не принадлежать одной плоскости или принадлежать ей. Две прямые одной плоскости могут иметь общую точку или не иметь ее. В соответствии с этим две прямые пространства или *скрещиваются* (рис. 281), или *пересекаются* (рис. 282), или *параллельны* (рис. 283).

Скрещивающиеся и пересекающиеся прямые могут быть *перпендикулярными*, т. е. такими, что угол между ними равен 90° (рис. 284).

Отношение	Признаки	Свойства
Прямые скрещиваются	Прямые скрещиваются, если: • одна из них принадлежит некоторой плоскости, а другая пересекает ее в точке, не принадлежащей первой прямой.	Если прямые скрещиваются, то: • через каждую из них можно провести плоскость, параллельную другой прямой; • через них можно провести плоскости, параллельные друг другу; • они имеют единственный общий перпендикуляр.
Прямые параллельны	Прямые параллельны, если: • они перпендикулярны одной плоскости; • они являются линиями пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.	• Если из трех различных прямых одна прямая параллельна второй, а вторая третьей, то первая и третья прямые также параллельны. • Если две различные прямые параллельны третьей, то они параллельны и друг другу. • Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то ее пересекает и другая прямая. • Если прямая пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость. • Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны друг другу.

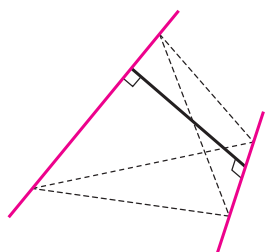


Рис. 281



Рис. 282

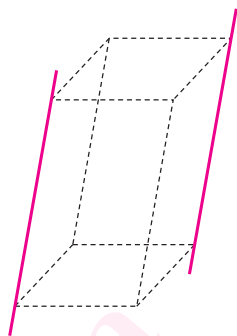


Рис. 283

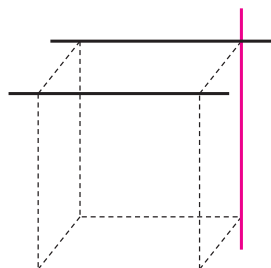


Рис. 284

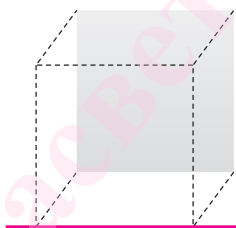


Рис. 285

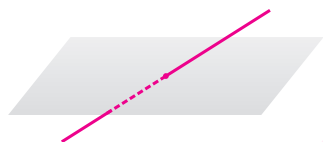


Рис. 286



Рис. 287

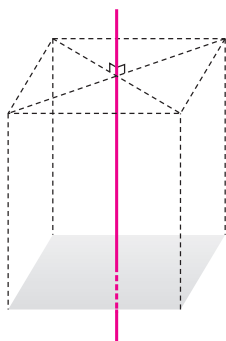


Рис. 288

Прямая и плоскость

В пространстве у прямой и плоскости общих точек может быть ни одной, одна или больше одной. В соответствии с этим **прямая и плоскость пространства** или *параллельны* (рис. 285), или *пересекаются* (рис. 286), или *прямая лежит в плоскости* (рис. 287).

Частным случаем пересекающихся прямой и плоскости является их *перпендикулярность*, т. е. такое их расположение, когда прямая перпендикулярна любой прямой плоскости (рис. 288).

Отношение	Признаки	Свойства
Прямая и плоскость параллельны	Прямая параллельна плоскости, если: • она не принадлежит этой плоскости и параллельна какой-либо ее прямой.	Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, то она пересекает ее по прямой, параллельной первой прямой.
Прямая и плоскость перпендикулярны	Прямая перпендикулярна плоскости, если: • она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости; • она является линией пересечения двух плоскостей, которые перпендикулярны данной плоскости.	Через каждую точку пространства можно провести: • единственную плоскость, перпендикулярную данной прямой; • единственную прямую, перпендикулярную данной плоскости.

Две плоскости

В пространстве две плоскости или имеют общую точку, или не имеют ее. В соответствии с этим две плоскости пространства или *параллельны* (рис. 289), или *пересекаются* (рис. 290).

Частным случаем пересекающихся плоскостей является их *перпендикулярность*, т. е. такое их расположение, когда угол между ними равен 90° (рис. 291).

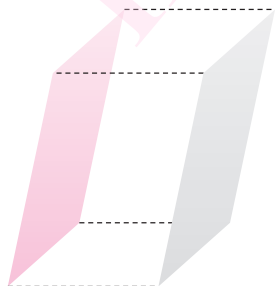


Рис. 289

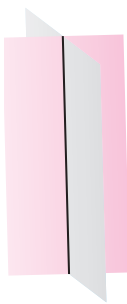


Рис. 290

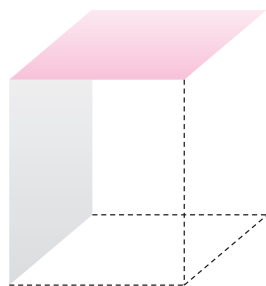


Рис. 291

Отношение	Признаки	Свойства
Параллельность плоскостей	Плоскости являются параллельными, если: • одна из них проходит через пересекающиеся прямые, параллельные другой плоскости; • две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости; • они перпендикулярны одной прямой.	• Если прямая перпендикулярна одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости. • Две параллельные плоскости высекают на параллельных прямых равные отрезки. • Три параллельные плоскости пересекают на двух прямых пропорциональные отрезки. • Если одна плоскость параллельна второй, а вторая — третьей, то первая и третья плоскости также параллельны. • Если две плоскости параллельны третьей, то они параллельны друг другу.
Перпендикулярность плоскостей	Плоскости являются перпендикулярными, если: одна из них проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости.	• Плоскость, перпендикулярная линии пересечения двух данных плоскостей, перпендикулярна каждой из них. • Если через точку одной из перпендикулярных плоскостей проведена прямая, перпендикулярная другой плоскости, то эта прямая принадлежит первой плоскости.

Перпендикуляр и наклонная к плоскости

Отрезок, соединяющий какую-либо точку P прямой l , перпендикулярной плоскости α , с точкой Q пересечения прямой l и плоскости α (рис. 292), называется *перпендикуляром плоскости*, проведенным из точки P , а точка Q — *основанием перпендикуляра*. Отрезок PR , соединяющий какую-либо точку P пространства, не принадлежащую плоскости α , с какой-либо ее точкой R , называется *наклонной к плоскости*, проведенной из точки P , а точка R — *основанием наклонной*. Если PQ — перпендикуляр к плоскости α , то отрезок QR называется *проекцией наклонной PR на плоскость α* .

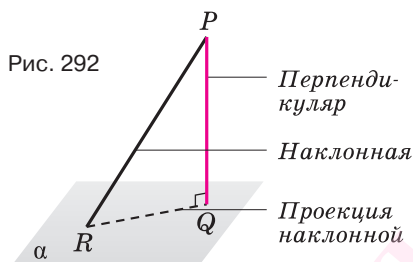


Рис. 292

Перпендикуляр
Наклонная
Проекция наклонной

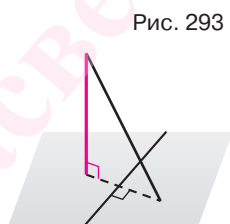


Рис. 293

Теорема о трех перпендикулярах. Если прямая плоскости перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и самой наклонной, а если прямая плоскости перпендикулярна наклонной к плоскости, то она перпендикулярна и проекции этой наклонной (рис. 293).

Две прямые плоскости

Параллельные прямые разделяют плоскость на две полуплоскости и полосу (рис. 294).

Пересекающиеся прямые разделяют плоскость на четыре угла (рис. 295), которые объединяют в пары. Углы 1 и 2, имеющие общую сторону, называют *смежными*, а углы 1 и 3, стороны каждого из которых являются продол-

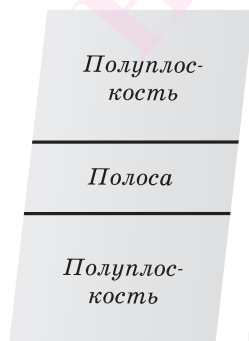
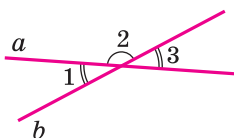


Рис. 294



$$\begin{aligned}\angle 1 + \angle 2 &= 180^\circ \\ \angle 1 &= \angle 3\end{aligned}$$

Рис. 295

жениями сторон другого угла, — *вертикальными*. Смежные углы вместе составляют 180° , а вертикальные углы равны друг другу.

Три прямые плоскости

Среди трех прямых a , b , c может не быть параллельных прямых (рис. 296) или такие прямые могут быть. Если параллельные прямые a и b есть, то третья прямая c может быть параллельной им (рис. 297) или пересекать их (рис. 298).

Если две прямые a и b пересечены третьей прямой, то образуется 8 углов (рис. 299). Углы 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 называются *соответственными*, углы 3 и 6, 4 и 5 — *внутренними односторонними*, углы 3 и 5, 4 и 6 — *внутренними накрест лежащими*.

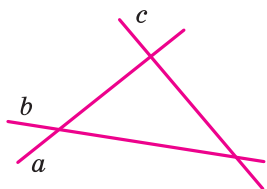


Рис. 296



Если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$
Если $a \parallel b$ и $a \parallel c$, то $b \parallel c$

Рис. 297

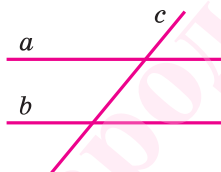


Рис. 298

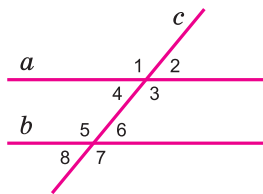


Рис. 299

Признаки параллельности прямых плоскости	Свойства параллельных прямых плоскости
Прямые являются параллельными, если: • они перпендикулярны одной прямой; • соответственные углы равны; • внутренние накрест лежащие углы равны; • внутренние односторонние углы вместе составляют 180°.	Если прямые параллельны, то: • соответственные углы равны; • внутренние накрест лежащие углы равны; • внутренние односторонние углы вместе составляют 180°.

Треугольник

Три попарно пересекающиеся прямые выделяют из плоскости треугольник (рис. 300). Стороны и углы треугольника называют его основными элементами. С треугольником связывают и другие элементы.

Внешний угол треугольника — угол, смежный с его внутренним углом (рис. 301).

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух его сторон (рис. 302).

Медиана треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны (рис. 303).

Биссектриса треугольника — отрезок биссектрисы угла треугольника, заключенный между его вершиной и противоположной стороной (рис. 304).

Высота треугольника — перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, проходящую через противоположную сторону (рис. 305).

Треугольник (рис. 306) имеет такие свойства.

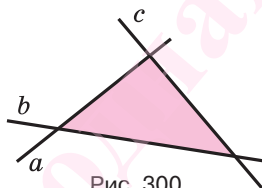


Рис. 300

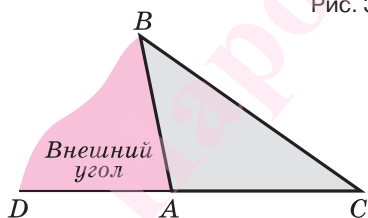


Рис. 301

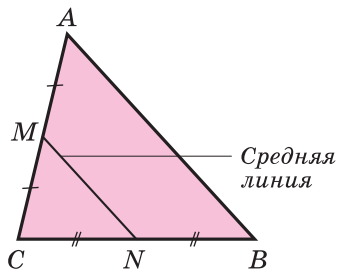


Рис. 302

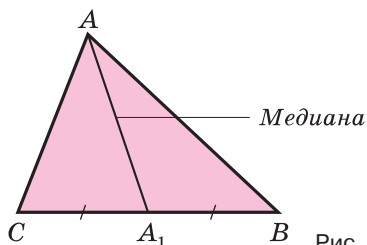


Рис. 303

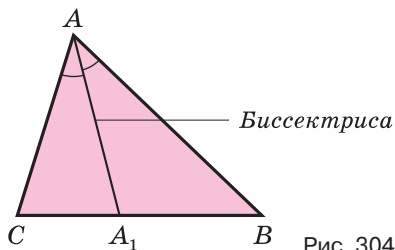


Рис. 304

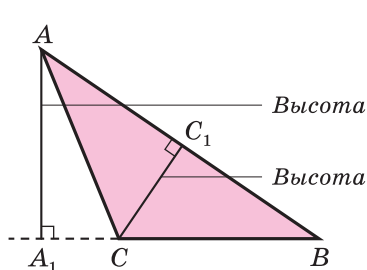


Рис. 305

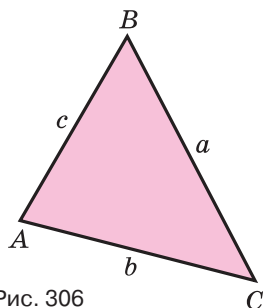


Рис. 306

Элемент	Свойство	
Стороны и углы	Сумма внутренних углов равна 180° .	$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.
	Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон и больше их разности.	$b - c < a < b + c$; $a - c < b < a + c$; $a - b < c < a + b$.
	Большему углу соответствует большая противолежащая сторона.	Если $\angle A > \angle C$, то $a > c$.
	Большей стороне соответствует больший противолежащий угол.	Если $a > c$, то $\angle A > \angle C$.
	Квадрат стороны равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними (<i>теорема косинусов</i>).	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.
	Стороны пропорциональны синусам противолежащих углов (<i>теорема синусов</i>).	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.
Внешний угол (см. рис. 301)	Внешний угол треугольника равен сумме двух его внутренних углов, не смежных с ним.	$\angle BAD = \angle B + \angle C$.
Средняя линия (см. рис. 302)	Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине.	$MN \parallel AB$, $MN = \frac{1}{2} AB$.

Элемент	Свойство	
Медиана	Медиана треугольника делит его на равновеликие части (см. рис. 303). Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2 : 1$, если считать от вершины (рис. 307).	$S_{CAA_1} = S_{BA A_1};$ $AG : GA_1 = 2 : 1,$ $BG : GB_1 = 2 : 1,$ $CG : GC_1 = 2 : 1.$
Биссектриса	Биссектриса треугольника делит противоположающую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам (см. рис. 304). Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Точка пересечения биссектрис треугольника делит каждую из них в отношении, первый компонент которой — сумма сторон, заключающих биссектрису, а второй — третья сторона (рис. 308).	$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC};$ $\frac{AI}{IA_1} = \frac{AB + AC}{BC}.$
Высота	Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке (рис. 309).	

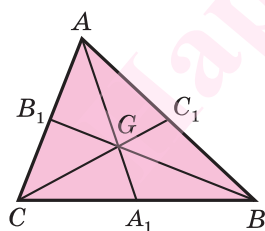


Рис. 307

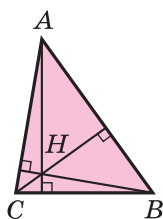


Рис. 309

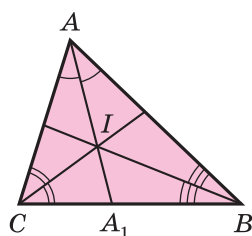
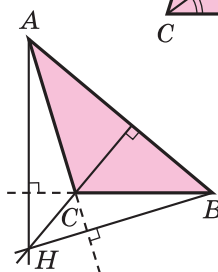


Рис. 308



Прямоугольный треугольник

Два угла треугольника обязательно острые, а третий — больший — его угол может быть и острым (рис. 310), и прямым (рис. 311), и тупым (рис. 312). В соответствии с этим треугольники делятся на *остроугольные*, *прямоугольные*, *тупоугольные*.

Стороны, образующие прямой угол прямоугольного треугольника, называют *катетами*, а третью его сторону — *гипотенузой*.

Прямоугольный треугольник (рис. 313) имеет такие свойства.

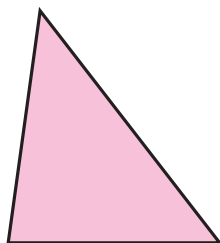


Рис. 310

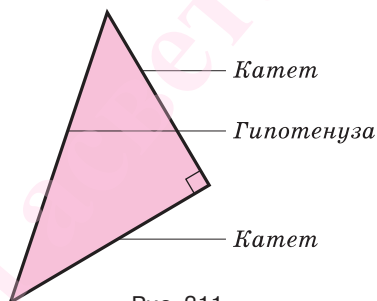


Рис. 311

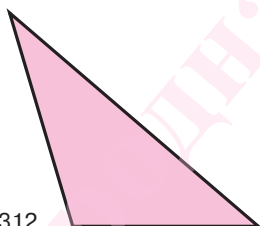


Рис. 312

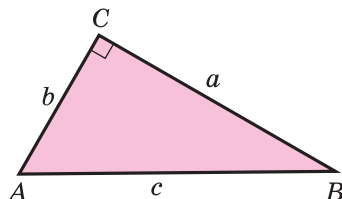


Рис. 213

Элемент	Свойство	
Стороны и углы	Острые углы вместе составляют 90° .	$\angle A + \angle B = 90^\circ$.
	Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (<i>теорема Пифагора</i>).	$AB^2 = AC^2 + BC^2$.
	Если катет лежит против угла в 30° , то он равен половине гипотенузы.	
	Если катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла в 30° .	

Элемент	Свойство	
	Синус острого угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе. Косинус острого угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе. Тангенс острого угла равен отношению противолежащего катета к прилежащему. Котангенс острого угла равен отношению прилежащего катета к противолежащему.	$\sin A = \frac{BC}{AB};$ $\cos A = \frac{AC}{AB};$ $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC};$ $\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.$
Медиана	Медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине этой гипотенузы и является радиусом описанной окружности (рис. 314).	$CC_1 = AC_1 = BC_1 = R.$
Высота	Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, является средним геометрическим отрезков, на которые она разделяет гипотенузу, а катет есть среднее геометрическое гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу (рис. 315).	$CC_1 = \sqrt{AC_1 \cdot BC_1};$ $AC = \sqrt{AB \cdot AC_1};$ $BC = \sqrt{AB \cdot BC_1}.$

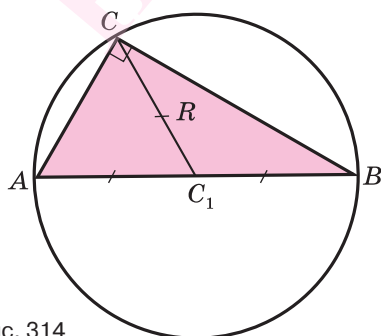


Рис. 314

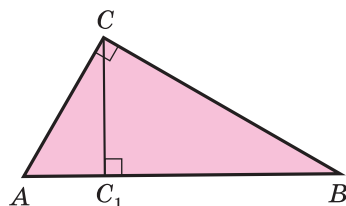


Рис. 315

Признаки прямоугольного треугольника. Треугольник является прямоугольным, если:

- он имеет прямой угол;
- сумма двух каких-либо его углов равна 90° ;
- квадрат большей его стороны равен сумме квадратов двух других сторон;
- одна из его медиан равна половине стороны, к которой проведена.

Равнобедренный треугольник

Если треугольник имеет равные стороны, его называют *равнобедренным* (рис. 316). Равнобедренный треугольник с тремя равными сторонами называют *равносторонним* (рис. 317).

Равные стороны равнобедренного треугольника называют *боковыми сторонами*, а третью сторону — *основанием*.

Равнобедренный треугольник (рис. 318) имеет такие свойства.

Элемент	Свойство	
Стороны и углы	Углы при основании равны.	$\angle A = \angle B$.
Медиана, высота, биссектриса	Медиана, биссектриса, высота, проведенные к основанию, совпадают.	Если CC_1 — медиана, то CC_1 — биссектриса и высота; если CC_1 — биссектриса, то CC_1 — медиана и высота; Если CC_1 — высота, то CC_1 — биссектриса и медиана.

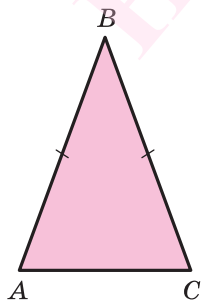


Рис. 316

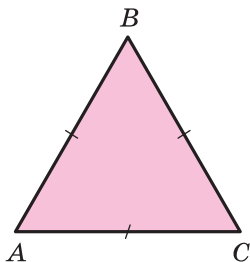


Рис. 317

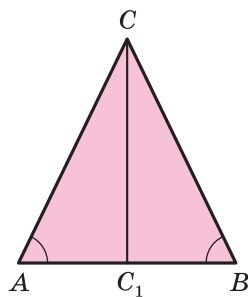


Рис. 318

Признаки равнобедренного треугольника. Треугольник является равнобедренным, если:

- две его стороны равны;
- два его угла равны;
- проведенные из одной вершины медиана и высота совпадают;
- проведенные из одной вершины медиана и биссектриса совпадают;
- проведенные из одной вершины высота и биссектриса совпадают.

Окружность и круг

Отношение длины C окружности к ее диаметру d есть постоянная величина для любой окружности. Это отношение выражается числом, обозначаемым π .

$$\pi = \frac{C}{d} \approx \frac{22}{7} \approx \frac{355}{113} \approx 3,141592...$$

Длина C окружности, площадь S соответствующего круга и их радиус r связаны формулами:

$$C = 2\pi r; S = \pi r^2; S = \frac{C}{2} r.$$

Окружность и прямая

Общих точек прямая с окружностью может иметь не более двух (рис. 319).

Секущая — прямая, имеющая с окружностью две общие точки.

Касательная — прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку.

Свойство касательной: касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Признак касательной. Прямая является касательной, если она проходит через точку окружности и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку.



Рис. 319

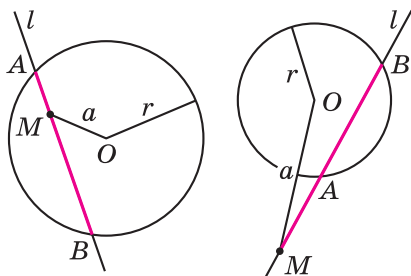


Рис. 320

$$MA \cdot MB = |a^2 - r^2|$$

Если прямая проходит через данную точку и пересекает данную окружность, то произведение расстояний от этой точки до точек пересечения прямой с окружностью есть величина постоянная для любой такой прямой, равная $r^2 - a^2$, где r — радиус круга, a — расстояние от центра до выбранной точки, если точка лежит внутри круга, и равная $a^2 - r^2$, если точка лежит вне круга (рис. 320).

Окружность и две прямые

Две параллельные прямые, каждая из которых имеет общие точки с окружностью, высекают из окружности равные дуги (рис. 321).

Пересекающиеся прямые по отношению к окружности могут располагаться так, что точка пересечения или совпадает с центром, или лежит на окружности, или лежит внутри круга, или лежит вне круга.

Угол, вершина которого находится в центре круга (рис. 322), называется *центральный угол*. Центральный угол измеряется дугой, на которую опирается.

Угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают окружность, называется *вписанным углом*. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Угол между касательной и секущей, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги, заключенной внутри него (рис. 323).

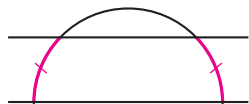
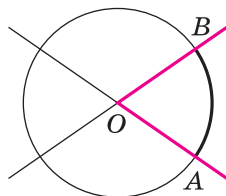
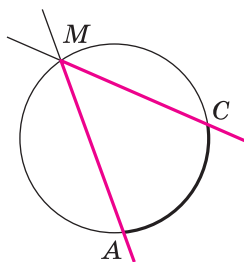


Рис. 321

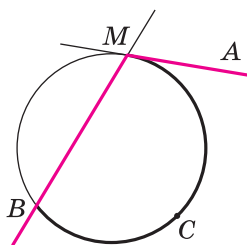


$$\angle AOB = \frown AB$$

Рис. 322



$$\angle AMC = \frac{1}{2} \circ AC$$



$$\angle AMB = \frac{1}{2} \circ BCM$$

Рис. 323

Вписанный угол, опирающийся на диаметр, является прямым. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны (рис. 324).

Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, одна из которых заключена между сторонами данного угла, а другая — между сторонами угла, вертикального данному (рис. 325).

Угол, вершина которого находится вне круга, а стороны пересекают окружность, измеряется полуразностью дуг, которые данный угол высекает из окружности (рис. 326).

Если секущая и касательная проходят через данную точку вне круга, то произведение расстояний от этой точки до точек пересечения секущей с окружностью равно квадрату расстояния от данной точки до точки касания касательной, проходящей через данную точку. Расстояния от данной точки вне круга до точек касания с данной окружностью двух касательных, проведенных через данную точку, равны друг другу (рис. 327).

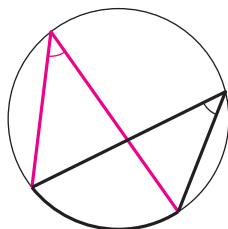
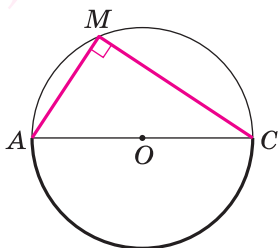
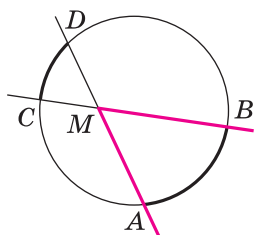
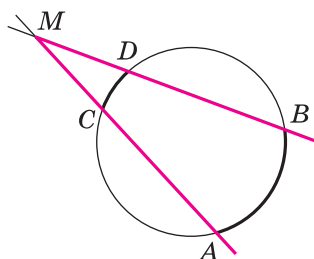


Рис. 324



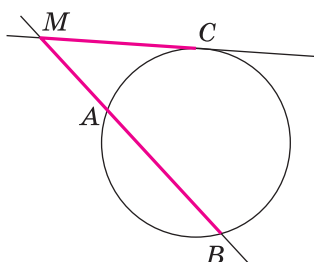
$$\angle AMB = \frac{1}{2} (\cup AB + \cup CD)$$

Рис. 325

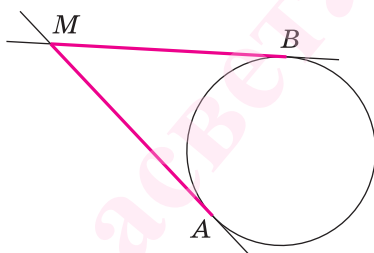


$$\angle AMB = \frac{1}{2} (\cup AB - \cup CD)$$

Рис. 326



$$MA \cdot MB = MC^2$$



$$MA = MB$$

Рис. 327

Окружность и треугольник

Окружность, вписанная в многоугольник, — окружность, касающаяся всех сторон многоугольника.

Окружность, описанная около многоугольника, — окружность, проходящая через все вершины многоугольника.

Центр вписанной окружности совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника (рис. 328).

Центр описанной окружности совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (рис. 329).

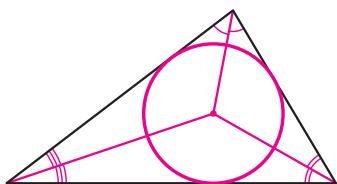


Рис. 328

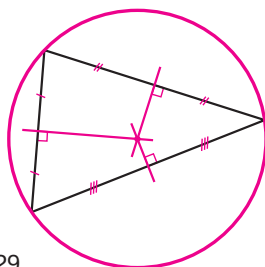


Рис. 329

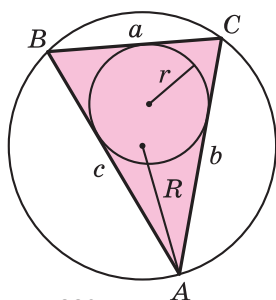


Рис. 330

Радиусы r и R вписанной и описанной окружностей связаны с другими элементами треугольника формулами:

$$r = \frac{S}{p};$$

$$R = \frac{abc}{4S};$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \text{ (рис. 330).}$$

Четырехугольник

Плоская замкнутая четырехзвенная ломаная без самопересечений выделяет из плоскости *четырёхугольник*. Четырёхугольник на рисунке 331 — *выпуклый*, а на рисунке 332 — *невыпуклый*. Обычно рассматривают выпуклые четырёхугольники.

Свойства четырёхугольника:

- сумма внутренних углов равна 360° ;
- середины сторон четырёхугольника являются вершинами параллелограмма (рис. 333);
- из треугольников, на которые диагонали разделяют четырёхугольник, произведение площадей треугольников, прилежащих к одной паре противоположных сторон, равно произведению площадей треугольников, прилежащих к другой паре противоположных сторон (рис. 334).



Рис. 331

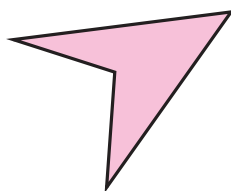


Рис. 332

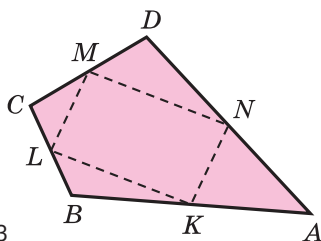
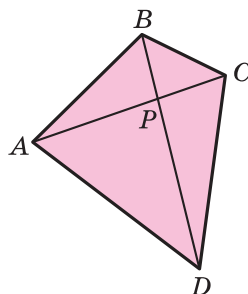


Рис. 333



$$S_{APD} \cdot S_{BPC} = S_{APB} \cdot S_{CPD}$$

Рис. 334

Трапеция

Трапеция — четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие непараллельны (рис. 335).

Свойства трапеции (рис. 336):

- сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна 180° :

$$\angle A + \angle B = 180^\circ; \angle C + \angle D = 180^\circ;$$

- средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме: $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$, $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$;

- две прямые, содержащие боковые стороны трапеции, и прямая, проходящая через середины ее оснований, пересекаются в одной точке;

- из треугольников, на которые диагонали разделяют трапецию, треугольники, прилежащие к основаниям, — подобны, а треугольники, прилежащие к боковым сторонам, — равновелики: $\triangle AOD \sim \triangle BOC$; $S_{AOB} = S_{DOC}$.

Признаки четырехугольника с параллельными сторонами:

- сумма углов, прилежащих к какой-либо стороне, равна 180° : $\angle A + \angle B = 180^\circ$ или $\angle B + \angle C = 180^\circ$ или $\angle C + \angle D = 180^\circ$ или $\angle D + \angle A = 180^\circ$;

- отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других его сторон: $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$ или $PQ = \frac{1}{2}(AB + CD)$;

- из четырех треугольников, на которые диагонали разделяют четырехугольник, два треугольника, прилежащие к противоположным сторонам, равновелики: $S_{AOB} = S_{DOC}$ или $S_{AOD} = S_{BOC}$.

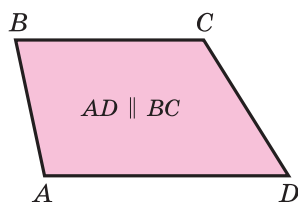


Рис. 335

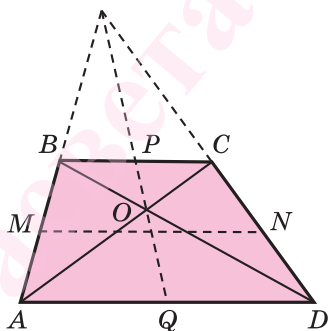


Рис. 336

Параллелограмм

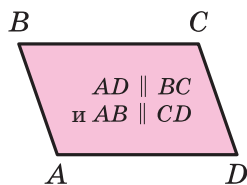


Рис. 337

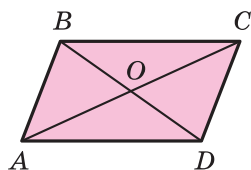


Рис. 338

Параллелограмм — четырехугольник, у которого есть две пары параллельных сторон (рис. 337).

Свойства параллелограмма (рис. 338):

- сумма углов, прилежащих к любой его стороне, равна 180° :

$$\angle A + \angle B = 180^\circ \text{ и } \angle B + \angle C = 180^\circ \text{ и } \angle C + \angle D = 180^\circ \text{ и } \angle D + \angle A = 180^\circ;$$

- его противоположные стороны параллельны и равны:

$$AD \parallel BC \text{ и } AB \parallel CD; AD = BC \text{ и } AB = CD;$$

- его противоположные углы равны:

$$\angle A = \angle C \text{ и } \angle B = \angle D;$$

- точка пересечения диагоналей делит их пополам: $AO = CO$; $BO = DO$.

- точка пересечения диагоналей есть центр симметрии параллелограмма.

Признаки параллелограмма. Четырехугольник является параллелограммом, если:

- суммы углов, прилежащих к каким-либо двум смежным сторонам, равны 180° каждая:

$$\angle A + \angle B = 180^\circ \text{ и } \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\text{или } \angle B + \angle C = 180^\circ \text{ и } \angle C + \angle D = 180^\circ$$

$$\text{или } \angle C + \angle D = 180^\circ \text{ и } \angle D + \angle A = 180^\circ$$

$$\text{или } \angle D + \angle A = 180^\circ \text{ и } \angle A + \angle B = 180^\circ;$$

- его противоположные стороны параллельны:

$$AD \parallel BC \text{ и } AB \parallel CD;$$

- его противоположные стороны равны:

$$AD = BC \text{ и } AB = CD;$$

- он имеет пару противоположных параллельных и равных сторон: $AD \parallel BC$ и $AD = BC$ или $AB = CD$ и $AB \parallel CD$;

- его противоположные углы равны:

$$\angle A = \angle C \text{ и } \angle B = \angle D;$$

- его диагонали точкой пересечения делятся пополам:

$$AO = CO; BO = DO.$$

Прямоугольник

Прямоугольник — параллелограмм, у которого есть прямой угол (рис. 339).

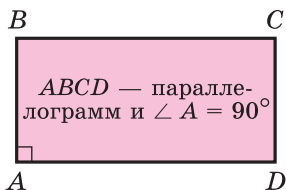


Рис. 339

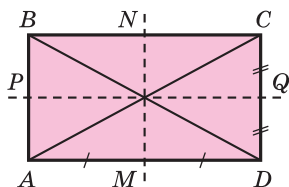


Рис. 340

Свойства прямоугольника (рис. 340):

- все его углы равны друг другу и прямые:

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ;$$

- его диагонали равны: $AC = BD$;

- серединные перпендикуляры к его сторонам являются осями симметрии.

Признаки прямоугольника. Параллелограмм является прямоугольником, если:

- его диагонали равны: $AC = BD$;

- серединный перпендикуляр к какой-либо стороне параллелограмма является его осью симметрии: MN — ось симметрии или PQ — ось симметрии.

Ромб

Ромб — параллелограмм, у которого есть равные смежные стороны (рис. 341).

Свойства ромба (рис. 342):

- все его стороны равны друг другу: $AB = BC = CD = DA$;

- его диагонали перпендикулярны: $AC \perp BD$;

- его диагонали делят углы пополам:

$$\angle ABD = \angle CBD \text{ и } \angle BCA = \angle DCA;$$

- прямые, содержащие диагонали, являются осями симметрии.

Признаки ромба. Параллелограмм является ромбом, если:

- он имеет пару равных смежных сторон:

$$AB = BC \text{ или } BC = CD \text{ или } CD = DA \text{ или } DA = AB;$$

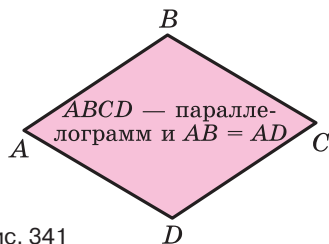


Рис. 341

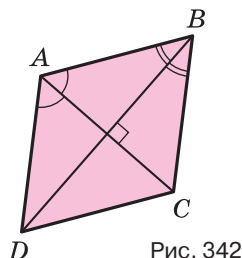


Рис. 342

- его диагонали перпендикулярны: $AC \perp BD$;
- его диагонали делят углы пополам:
 $\angle ABD = \angle CBD$ и $\angle BCA = \angle DCA$;
- прямые, содержащие диагонали, являются осями симметрии.

Квадрат

Квадрат — прямоугольник, у которого есть равные смежные стороны, или ромб, у которого есть прямой угол (рис. 343).

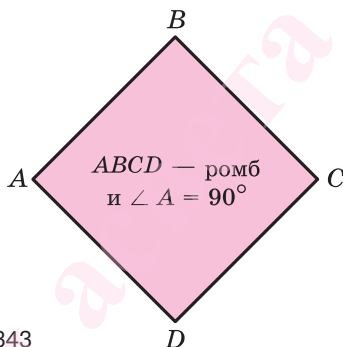
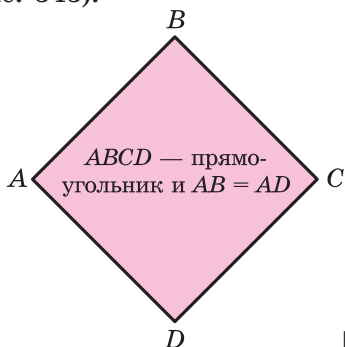


Рис. 343

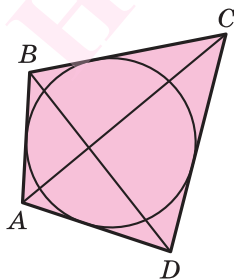
Поскольку квадрат является и прямоугольником, и ромбом, то у него есть все свойства прямоугольника и все свойства ромба.

Окружность и четырехугольник

Свойство описанного четырехугольника (рис. 344): суммы противоположных сторон равны.

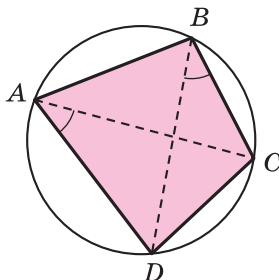
Признак описанного четырехугольника. Четырехугольник является описанным около окружности, если у него равны суммы противоположных сторон.

Свойства вписанного четырехугольника (рис. 345):



$$AD + BC = AB + CD$$

Рис. 344



$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$$

Рис. 345

- суммы противоположных углов равны 180° ;
- произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Признаки вписанного четырехугольника. Четырехугольник является вписанным в окружность, если:

- сумма противоположных углов равна 180° :
 $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$;
- углы, каждый из которых образован стороной и диагональю и которые опираются на одну сторону, равны:
 $\angle ACB = \angle ADB$ или $\angle BAC = \angle BDC$ или $\angle CAD = \angle CBD$ или $\angle ACD = \angle ABD$.

Отношения между фигурами

Геометрические фигуры могут находиться в отношении равенства и подобия.

Равные фигуры — фигуры, преобразующиеся друг в друга при некотором движении.

Признаки равенства треугольников. Треугольники являются равными, если соответственно равны:

- две стороны и угол между ними в одном двум сторонам и углу между ними в другом;
- сторона и прилежащие к ней углы в одном стороне и прилежащим к ней углам в другом;
- три стороны в одном трем сторонам в другом.

Признаки равенства прямоугольных треугольников. Прямоугольные треугольники являются равными, если у них соответственно равны:

- катеты;
- катет и прилежащий к нему острый угол;
- гипотенуза и острый угол;
- гипотенуза и катет.

Теория подобия основывается на **теореме Фалеса**: если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, то отрезки, высекаемые ими на другой стороне угла, также равны (рис. 346).

Верна обобщенная теорема Фалеса: ряд параллельных прямых, пересека-

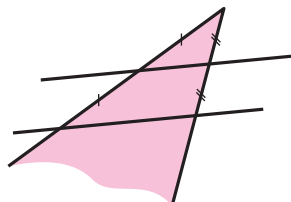


Рис. 346

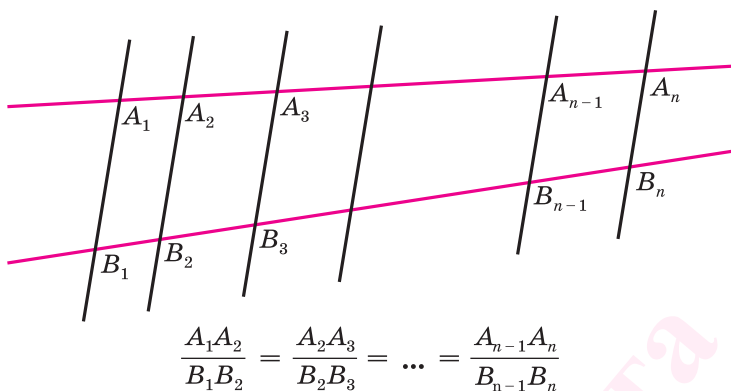


Рис. 347

ющих две другие прямые, высекают на них пропорциональные отрезки (рис. 347).

Подобные треугольники — треугольники, углы которых попарно равны, а соответствующие стороны пропорциональны.

Признаки подобия треугольников. Треугольники являются подобными, если у них:

- есть по равному углу, а прилежащие к ним стороны пропорциональны;
- есть по два равных угла;
- три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого.

Отношение **любых** соответствующих линейных элементов подобных фигур равно коэффициенту подобия. Отношение периметров подобных многоугольников равно коэффициенту подобия. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Отношение объемов подобных фигур-тел равно кубу коэффициента подобия.



1. Какие две прямые пространства называют скрещивающимися; пересекающимися; параллельными?
2. Сформулируйте свойства скрещивающихся прямых; параллельных прямых.
3. Сформулируйте признак скрещивающихся прямых; признаки параллельных прямых.
4. Какие прямая и плоскость называются параллельными; пересекающимися; перпендикулярными?
5. Сформулируйте свойства параллельных прямой и плоскости; перпендикулярных прямой и плоскости.

6. Сформулируйте признаки параллельности прямой и плоскости; перпендикулярности прямой и плоскости.
7. Какие две плоскости называют параллельными; пересекающимися; перпендикулярными?
8. Сформулируйте свойства параллельных плоскостей; перпендикулярных плоскостей.
9. Сформулируйте признаки параллельных плоскостей; перпендикулярных плоскостей.
10. Какой отрезок называют перпендикуляром к плоскости; наклонной к плоскости; проекцией наклонной на плоскость?
11. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах.
12. Какие углы называют смежными; вертикальными?
13. Сформулируйте свойство смежных углов; вертикальных углов.
14. Какие углы, образованные при пересечении двух прямых третьей, называют соответственными; внутренними накрест лежащими; внутренними односторонними?
15. Сформулируйте свойства углов, образованных при пересечении двух прямых третьей.
16. Сформулируйте признаки параллельных прямых через углы, образованные при пересечении двух прямых третьей.
17. Какой отрезок называют средней линией треугольника; медианой треугольника; биссектрисой треугольника; высотой треугольника?
18. Какой угол называют внешним углом треугольника?
19. Сформулируйте свойства-неравенства, связывающие стороны и углы треугольника.
20. Сформулируйте свойства-равенства, связывающие стороны и углы треугольника.
21. Сформулируйте свойства внешнего угла треугольника.
22. Сформулируйте свойства средней линии треугольника.
23. Сформулируйте свойства медианы треугольника; точки пересечения медиан треугольника.
24. Сформулируйте свойства биссектрисы треугольника; точки пересечения биссектрис треугольника.
25. Какой треугольник называется остроугольным; прямоугольным; тупоугольным?
26. Как называются стороны прямоугольного треугольника?
27. Сформулируйте свойства углов прямоугольного треугольника; сторон прямоугольного треугольника; медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе; высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе.
28. Сформулируйте признаки прямоугольного треугольника.
29. Какой треугольник называется равнобедренным; равносторонним?
30. Сформулируйте свойства равнобедренного треугольника; признаки равнобедренного треугольника.
31. Что выражает число π ?
32. Чему равна длина окружности; площадь круга?
33. Какая прямая называется касательной к окружности; секущей окружности?
34. Сформулируйте свойства касательной; признак касательной.

35. Сформулируйте свойства точки секущей, расположенной внутри круга; точки секущей, расположенной вне круга.
36. Сформулируйте свойства дуг, отсекаемых из окружности параллельными прямыми.
37. Какой угол называется центральным; вписанным?
38. Как измеряется центральный угол; вписанный угол; угол с вершиной внутри круга; угол с вершиной вне круга?
39. Как связаны между собой расстояния от данной точки секущей, расположенной вне круга, до точек ее пересечения с окружностью и расстояние от данной точки до точки касания касательной, проходящей через данную точку?
40. Как связаны расстояния от данной точки вне круга до точек касания с данной окружностью двух касательных, проведенных через данную точку?
41. Какая окружность называется вписанной в многоугольник; описанной около многоугольника?
42. Где находится центр вписанной в треугольник окружности; центр описанной около треугольника окружности?
43. Как радиусы вписанной в треугольник окружности и описанной около треугольника окружности связаны с основными элементами треугольника и его площадью?
44. Как сторона треугольника и противолежащий ей угол связаны с радиусом описанной окружности?
45. Сформулируйте свойства четырехугольника.
46. Какой четырехугольник называется трапецией; параллелограммом?
47. Какой параллелограмм называется прямоугольником; ромбом?
48. Дайте два определения квадрата.
49. Сформулируйте свойства трапеции; параллелограмма; прямоугольника; ромба.
50. Сформулируйте признаки трапеции; параллелограмма; прямоугольника; ромба.
51. Сформулируйте свойства описанного четырехугольника; признак описанного четырехугольника.
52. Сформулируйте свойства вписанного четырехугольника; признак вписанного четырехугольника.
53. Какое отношение между фигурами называется равенством фигур; подобием фигур?
54. Сформулируйте признаки равенства треугольников; признаки подобия треугольников.
55. Сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников.
56. Сформулируйте теорему Фалеса; обобщенную теорему Фалеса.
57. Чему равно отношение линейных элементов подобных фигур; площадей подобных фигур; объемов подобных фигур?
58. Как отношение равенства фигур связано с отношением подобия?

1202. Из точки K опущены перпендикуляры KM и KN на стороны угла ABC величиной 60° . Найдите отрезок MN , учитывая, что $KB = a$.

1203. Найдите сторону BC треугольника ABC , у которого угол A равен 60° , а стороны AB и AC — соответственно 5 и 8.

1204. Найдите сторону AC треугольника ABC и дайте геометрическое объяснение полученному результату, учитывая, что:

- а) угол A равен 60° , а стороны AB и BC — соответственно 15 и 13;
- б) угол A равен 120° , а стороны AB и BC — соответственно 16 и 19;
- в) угол A равен 60° , а стороны AB и BC — соответственно $2\sqrt{6}$ и $6\sqrt{2}$;
- г) угол A равен α , а стороны AB и BC — соответственно c и a ; установите, сколько решений имеет задача при различных значениях a , b и α .

1205. Найдите периметр треугольника, у которого:

- а) средняя по длине сторона на единицу отличается от каждой из остальных сторон, а косинус наибольшего угла равен $\frac{5}{13}$;
- б) одна сторона равна 6 см, а прилежащие к ней углы — 45° и 60° .

1206. Найдите отношение сторон AC и BC треугольника ABC , углы A и B которого соответственно равны 30° и 45° .

1207. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, у которого:

- а) одна сторона равна 10, а угол против нее — 120° ;
- б) одна сторона равна m , а прилежащие к ней углы — α и β ;
- в) две стороны равны a и b , а высота, проведенная к третьей стороне, — h .

1208. Основание равнобедренного треугольника равно a , боковая сторона — b , а высота, проведенная к основанию, — h . Выразите радиус окружности, описанной около треугольника, через каждые две из трех данных переменных.

1209. Найдите радиус окружности, проходящей через:

- а) две противоположные вершины прямоугольника с измерениями 4 и 6 и середину большей стороны;
- б) две противоположные вершины прямоугольника с измерениями 4 и 6 и середину меньшей стороны;
- в) через вершины острых углов и середину большей стороны прямоугольного треугольника с катетами 12 и 5;
- г) через центр квадрата со стороной a , его вершину и середину стороны, не содержащей этой вершины.

1210. Найдите:

- а) $\sin 15^\circ$; б) $\cos 75^\circ$; в) $\operatorname{tg} 105^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 165^\circ$.

1211. Докажите, что окружности, описанные около треугольников:

- а) ACK и BSK , где K — точка основания AB равнобедренного треугольника ABC , равны друг другу;
- б) ABC и ABH , где H — точка пересечения высот непрямоугольного треугольника ABC , симметричны относительно прямой AB .

1212. В окружность вписан треугольник ABC , у которого $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите угол C , учитывая, что центр окружности находится вне треугольника на расстоянии 1 от стороны AB .

1213. OA и OB — отрезки одной прямой, $OA = a$, $OB = b$. Найдите расстояние между:

- а) точками A и B ; б) точкой O и серединой C отрезка AB .

1214. Найдите угол между биссектрисами:

- а) двух углов с общей стороной, величины которых равны α и β , и примените результат для случая смежных углов;
- б) углов AOB и COD , учитывая, что они и угол BOC соответственно равны α , β и γ , и примените результат для случая вертикальных углов.

1215. Выясните:

- а) можно ли разносторонний треугольник разрезать на два равных треугольника;
- б) сколькими способами равносторонний треугольник можно разрезать на два равных треугольника.

1216. Учитывая, что M — внутренняя точка треугольника ABC , сравните углы BAC и BMC .

1217. Учитывая, что точка M — основание медианы AM треугольника ABC и $AB > AC$, сравните углы:

- а) $\angle AMB$ и $\angle AMC$; б) $\angle BAM$ и $\angle CAM$.

1218. Учитывая, что точка L — основание биссектрисы AL треугольника ABC и $AB > AC$, сравните:

- а) углы $\angle ALB$ и $\angle ALC$; б) отрезки BL и CL .

1219. Учитывая, что точки M, L, H — соответственно основания медианы, биссектрисы и высоты AM, AL, AH треугольника ABC с неравными сторонами AB и AC , установите взаимное расположение этих точек на прямой BC .

1220. Докажите, что:

- а) сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны меньше чем на удвоенный отрезок, соединяющий общую точку этих двух сторон с произвольной точкой третьей стороны;
б) сумма расстояний от произвольной точки многоугольника до всех его вершин больше полупериметра многоугольника;
в) медиана треугольника меньше полусуммы сторон, ее заключающих, и больше разности этой полусуммы и половины третьей стороны.

1221. Найдите:

- а) границы, между которыми заключена сумма медиан треугольника, учитывая, что его стороны равны a, b, c ;
б) точку, сумма расстояний от которой до вершин данного четырехугольника наименьшая.

1222. Докажите, что отрезок, соединяющий:

- а) вершину треугольника и произвольную точку противоположной стороны, меньше большей из двух других сторон;
б) точки двух сторон треугольника, меньше наибольшей его стороны;
в) две внутренние точки треугольника, меньше наибольшей его стороны.

1223. Есть треугольник, у которого один из углов не меньше 90° . Его острый угол разделен лучами на несколько долей. Докажите, что эти лучи делят противоположную сторону на части, длины которых возрастают, если считать от вершины большего угла.

1224. Есть треугольник, у которого один из углов не меньше 90° . Одна из сторон этого угла разделена на несколько долей. Докажите, что лучи, выходящие из вершины противоположного угла и проходящие через точки деления, разделяют этот угол на части, величины которых убывают, если считать от другой стороны большего угла.

1225. Докажите, что луч, выходящий из вершины равнобедренного треугольника, противоположащей основанию, и параллельный этому основанию, делит соответствующий внешний угол пополам.

1226. Через точку пересечения биссектрис треугольника проведена прямая, параллельная одной из сторон. Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный между сторонами треугольника, равен сумме отрезков сторон, заключенных между параллельными прямыми.

1227. Один из углов треугольника равен α . Найдите угол, образованный:

- биссектрисами внутренних углов, прилежащих к стороне против угла α ;
- биссектрисами внешних углов, прилежащих к стороне против угла α ;
- биссектрисами одного из внутренних углов, прилежащих к стороне против угла α , и биссектрисой внешнего угла при другом конце этой стороны.

1228. Углы B и C треугольника ABC равны β и γ соответственно, причем $\beta < \gamma$. Основание D биссектрисы AD соединено с такой точкой E стороны AB , что $AE = AC$. Найдите угол BDE , учитывая, что отрезок AD является биссектрисой:

- внутреннего угла A (рис. 348);
- внешнего угла при вершине A (рис. 349).

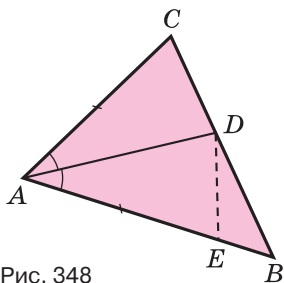


Рис. 348

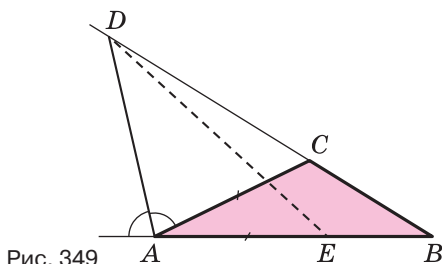


Рис. 349

1229. Найдите угол между:

- а) высотой и биссектрисой, проведенными из одной вершины треугольника, учитывая, что углы против этой вершины равны α и β ;
- б) высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла прямоугольного треугольника с острым углом α .

1230. Докажите, что биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника с разными катетами делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе.

1231. Три угла четырехугольника равны α , β и γ . Найдите угол между биссектрисами двух:

- а) соседних углов;
- б) противоположных углов;
- в) углов, образованных парами прямых, которым принадлежат противоположные стороны.

1232. Докажите, что:

- а) если противоположные стороны шестигульника равны и параллельны, то три его диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке (рис. 350);
- б) если противоположные стороны четырехугольника не параллельны, то три прямые, проходящие через середины противоположных сторон и середины диагоналей, пересекаются в одной точке;
- в) середины диагоналей трапеции и середины боковых сторон лежат на одной прямой.

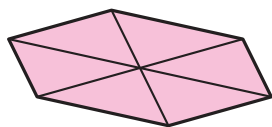


Рис. 350

1233. Найдите расстояние:

- а) между серединами диагоналей трапеции, учитывая, что основания трапеции равны a и b ;
- б) от середины отрезка до прямой, учитывая, что его концы отстоят от этой прямой на a и b ;
- в) от вершины параллелограмма до прямой, проходящей через противоположную вершину, учитывая, что две другие вершины отстоят от этой прямой на a и b .

1234. Докажите, что сумма расстояний от любой:

- а) точки основания равнобедренного треугольника до его боковых сторон равна высоте этого треугольника, проведенной к боковой стороне;
- б) внутренней точки равностороннего треугольника до его сторон равна высоте этого треугольника.

1235. Выясните, при каком условии:

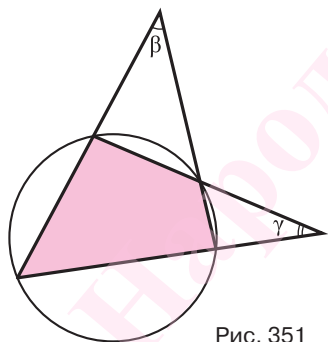
- а) около параллелограмма можно описать окружность;
- б) около трапеции можно описать окружность;
- в) в параллелограмм можно вписать окружность.

1236. Выясните, какая из:

- а) хорд, проходящих через точку внутри круга, наименьшая;
- б) секущих, проходящих через данную точку вне круга, имеет с ним наибольшую общую часть.

1237. Установите, как два круга с радиусами r и $3r$ расположены относительно друг друга, учитывая, что их центры отстоят на:

- а) r ; б) $2r$; в) $3r$; г) $5r$; д) $4r$.



1238. Выясните, сколько одинаковых кругов можно расположить вокруг круга такого же радиуса так, чтобы каждый из них касался этого круга и двух соседних.

1239. Найдите углы вписанного в окружность четырехугольника, учитывая, что углы между его противоположными сторонами равны α и β (рис. 351).

1240. Углы, прилежащие к одной стороне вписанного в окружность треугольника, равны α и β . Найдите угол между этой стороной и касательной окружности, проведенной через противоположающую вершину.

1241. Два угла треугольника, вписанного в окружность, равны α и β . Найдите углы треугольника, образованного касательными окружности, проведенными через вершины данного треугольника.

1242. Докажите, что хорды двух:

а) пересекающихся окружностей, которые соединяют точки пересечения с ними двух секущих, проходящих через точки пересечения окружностей, параллельны друг другу (рис. 352);

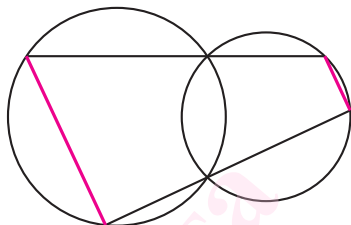


Рис. 352

б) касающихся окружностей, которые соединяют точки пересечения с ними двух секущих, проходящих через точку касания окружностей, параллельны друг другу (рис. 353).

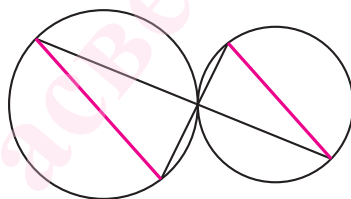


Рис. 353

1243. Докажите, что прямая, параллельная касательной в вершине вписанного треугольника и пересекающая стороны, выходящие из этой вершины, отсекает от треугольника четырехугольник, около которого можно описать окружность.

1244. Есть равносторонний треугольник, вписанный в окружность. Докажите, что расстояние любой точки дуги, стягиваемой какой-либо стороной треугольника, от противолежащей вершины равно сумме расстояний этой точки от двух других вершин.

1245. Докажите, что:

а) высота треугольника и радиус описанного около него круга, проведенные из одной вершины, образуют равные углы со сторонами треугольника, выходящими из той же вершины;

б) основания высот треугольника являются вершинами треугольника, для которого высоты данного треугольника являются биссектрисами;

в) если из четырех точек одна является ортоцентром треугольника с вершинами в трех остальных точках, то каждая из этих точек является ортоцентром треугольника с вершинами в трех остальных точках;

г) биссектриса внутреннего угла треугольника и биссектрисы двух внешних углов при двух других вершинах пересекаются в одной точке, которая равноудалена от стороны, противоле-

жащей этому внутреннему углу, и прямых, проходящих через две другие стороны;

д) из шести биссектрис внутренних и внешних углов треугольника каждые три, которые пересекаются в одной точке, являются высотами треугольника с вершинами в трех остальных точках.

1246. Выясните, к какой стороне треугольника ближе расположена точка пересечения:

- а) серединных перпендикуляров сторон треугольника;
- б) высот треугольника;
- в) медиан треугольника.

1247. Выясните, к какой вершине треугольника ближе расположена точка пересечения:

- а) биссектрис треугольника;
- б) высот треугольника;
- в) медиан треугольника.

1248. Выясните, какой из трех отрезков наименьший, учитывая, что эти отрезки являются:

- а) высотами одного треугольника;
- б) медианами одного треугольника;
- в) биссектрисами треугольника.

1249. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с внутренней точкой противоположной стороны, разделяет его на два треугольника. Докажите, что эта вершина и центры окружностей, описанных около этих и данного треугольников, лежат на одной окружности.

1250. Докажите, что:

- а) отрезки, соединяющие вершину параллелограмма с серединами сторон, сходящихся в противоположной вершине, разделяют на три доли диагональ, соединяющую две другие вершины;
- б) расстояние от центра окружности, описанной около треугольника, до стороны треугольника в два раза меньше расстояния от ортоцентра до противоположной вершины.

1251. Есть два подобных треугольника, стороны одного из которых равны 5, 6, 8, а наименьшая сторона второго — 15. Найдите две другие стороны второго треугольника.

1252. Докажите, что:

- а) два параллелограмма подобны, если у них есть по равному углу и стороны их пропорциональны;
- б) два прямоугольника подобны, если они имеют пару пропорциональных смежных сторон;
- в) два любых квадрата подобны.

1253. Есть два параллельных отрезка BD и CE с концами на сторонах угла A (рис. 354). Прямые, проходящие через концы отрезка BD и перпендикулярные сторонам угла, пересекаются в точке F , а такие же прямые для отрезка CE — в точке G . Докажите, что точки A, F, G лежат на одной прямой.

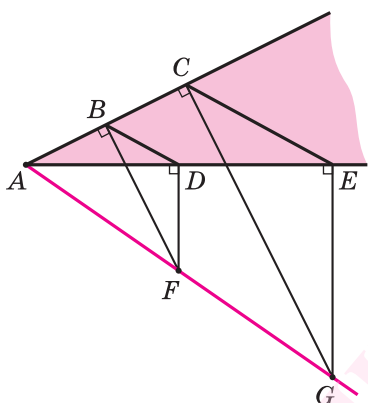
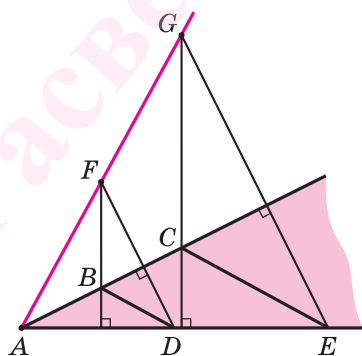


Рис. 354



1254. Найдите длину отрезка, концы которого:

- а) лежат на сторонах треугольника и делят каждую в отношении $m : n$, если считать от их общей вершины, учитывая, что третья сторона треугольника равна a ;
- б) лежат на боковых сторонах трапеции и делят их в отношении $m : n$, если считать от большего основания длиной a , учитывая, что другое основание равно b .

1255. Вершины треугольника отстоят от не пересекающей его прямой на k, l, m . Найдите расстояние от этой прямой до центра тяжести треугольника.

1256. Есть трапеция с основаниями a и b . Найдите:

- а) отношение отрезков каждой диагонали, на которые они делятся точкой пересечения;
- б) отношение расстояний от точки пересечения боковых сторон до концов каждой из них;

в) длину отрезка прямой, проведенной параллельно основаниям через точку пересечения диагоналей, причем концы отрезка принадлежат боковым сторонам;

г) длину отрезка прямой, проведенной параллельно основаниям через точку пересечения прямых, содержащих боковые стороны, причем концы отрезка принадлежат прямым, содержащим диагонали.

1257. Есть треугольник со сторонами a , b , c . Найдите расстояния от концов стороны длиной a до точки, в которой биссектриса внешнего угла при противолежащей вершине пересекает прямую, содержащую эту сторону.

1258. Прямая пересекает две стороны треугольника и прямую, содержащую третью сторону. Учитывая, что точками пересечения первая и вторая сторона делятся в отношении k и l , найдите отношение расстояний от точки пересечения прямой с продолжением третьей стороны до ее концов.

1259. Докажите, что прямой, проходящей через середины оснований трапеции, принадлежат точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны.

1260. Через середину хорды длиной a проведена другая хорда длиной b . Найдите отрезки, на которые эта хорда делится первой хордой.

1261. Окружность касается одной стороны треугольника и пересекает его другую сторону в точках, отстоящих от вершины на a и на b . Найдите расстояние от вершины треугольника до точки касания.

1262. Через точку внутри круга с радиусом r , отстоящую от центра на a , проведен диаметр и перпендикулярная ему хорда. Найдите эту хорду.

1263. Через точку вне круга с радиусом r , отстоящую от центра на a , проведена касательная. Найдите расстояние от этой точки до точки касания.

1264. Используя свойства внутренней точки хорды окружности, докажите теорему косинусов и теорему Пифагора.

1265. Докажите, что расстояние точки окружности от ее хорды равно среднему геометрическому расстояний концов хорды от касательной к окружности в этой точке.

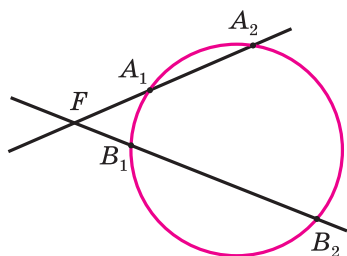


Рис. 355

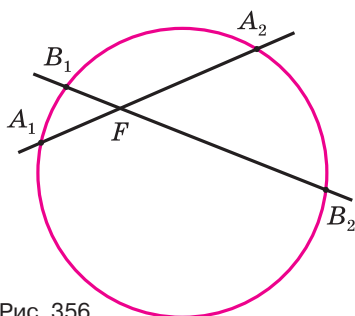


Рис. 356

1266. От точки F пересечения прямых на одной из них отмечены такие точки A_1 и A_2 , на другой — такие точки B_1 и B_2 , что $FA_1 \cdot FA_2 = FB_1 \cdot FB_2$, при этом точки отмечались на обеих прямых по одну сторону (рис. 355) или на обеих прямых по разные стороны от точки F (рис. 356). Докажите, что точки A_1, A_2, B_1 и B_2 лежат на одной окружности. Используя это, докажите, что:

- а) общие хорды трех попарно пересекающихся окружностей пересекаются в одной точке или параллельны;
- б) общие хорды данной окружности со всеми окружностями, проходящими через две данные точки, пересекаются в одной точке или параллельны.

1267. Через произвольно выбранную точку прямой, содержащей общую хорду двух окружностей, проведены их касательные. Докажите, что расстояния от этой точки до точек касания равны друг другу.

1268. Через конец A диаметра AB данной окружности проведена прямая l , пересекающая другую прямую m , которая перпендикулярна прямой AB (рис. 357). Докажите, что произ-

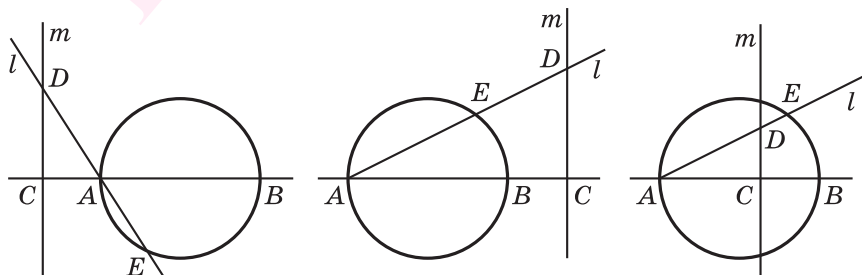


Рис. 357

ведение расстояний от конца A диаметра до точек D и E пересечения прямой l с прямой m и окружностью соответственно есть постоянная величина.

1269. Через центр Q гомотетии двух окружностей проведена прямая, пересекающая их в точках A_1 и A_2 , причем эти точки не являются гомотетичными (рис. 358). Докажите, что для любой такой секущей произведение $QA_1 \cdot QA_2$ есть постоянная величина.

1270. Центры двух окружностей с радиусами r и R удалены на d . Найдите расстояние между точками касания их:

- а) внешней касательной; б) внутренней касательной.

1271. Найдите расстояние между точками касания внешней касательной двух касающихся окружностей с радиусами r и R .

1272. Найдите радиус круга, который касается двух внешним образом касающихся окружностей с радиусами r и R и их общей касательной (рис. 359).

1273. На отрезке и двух его половинах в одной полуплоскости построены полукруги (рис. 360). Учтитевая, что радиус меньшего полукруга равен r , найдите радиус круга, касающегося всех трех полукругов.

1274. На отрезке и двух его неравных частях в одной полуплоскости построены полукруги. Учтитевая, что радиусы двух меньших полукругов равны R и r , найдите радиус круга, касающегося всех трех полукругов.

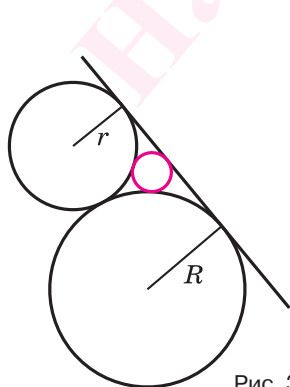


Рис. 359

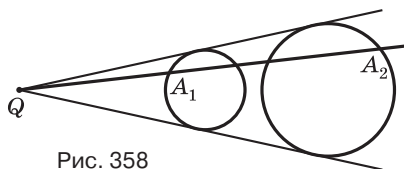


Рис. 358

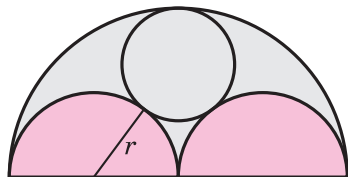


Рис. 360

1275. Прямоугольный сектор с радиусом r разделен на две части дугой с таким же радиусом и с центром в конце дуги сектора. Найдите радиус круга, вписанного:

- в меньшую часть;
- в большую часть (рис. 361).

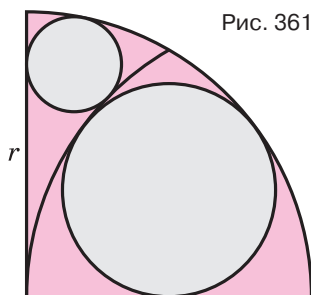


Рис. 361

1276. Найдите:

- проведенную к гипотенузе высоту прямоугольного треугольника, учитывая, что его катеты равны a и b ;
- сторону треугольника, учитывая, что проведенная к ней высота равна h , а две другие стороны — a и b ;
- высоты треугольника и его площадь, учитывая, что его стороны равны a, b, c ;
- площадь треугольника, учитывая, что его высоты равны h_a, h_b, h_c ;
- медианы треугольника, учитывая, что его стороны равны a, b, c ;
- стороны треугольника и его площадь, учитывая, что его медианы равны m_a, m_b, m_c ;
- биссектрису l_a треугольника, учитывая, что его стороны равны a, b, c ;
- радиус описанной около треугольника окружности, учитывая, что его стороны равны a, b, c .

1277. Докажите, что квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, выходящих из той же вершины, что и биссектриса, уменьшенному на произведение отрезков, на которые основание биссектрисы делит противоположащую сторону.

1278. Докажите, что площадь остроугольного треугольника равна радиусу описанного круга и полупериметра треугольника, образованного основаниями высот.

1279. Стороны треугольника равны a, b, c . Найдите:

- радиус вневписанной окружности, касающейся стороны a (рис. 362);

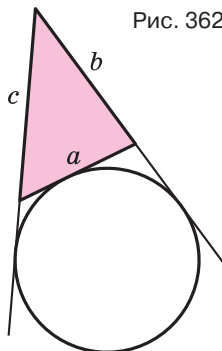


Рис. 362

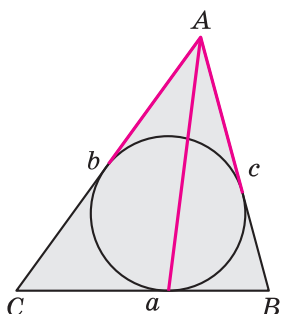


Рис. 363

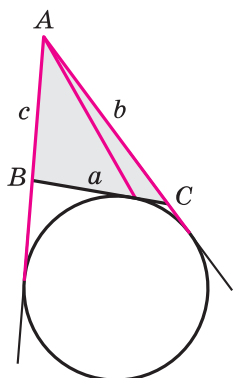


Рис. 364

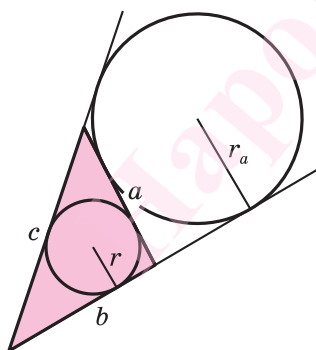


Рис. 365

б) расстояния от вершины A до точек касания вписанной окружности и сторон треугольника (рис. 363);
в) расстояния от вершины A треугольника до точек касания противолежащей внеписанной окружности и прямых, содержащих стороны треугольника (рис. 364).

1280. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b , а гипотенуза — c . Найдите радиусы вписанной и внеписанных окружностей.

1281. Докажите, что радиус r окружности, вписанной в треугольник со сторонами a, b, c , и радиус r_a его внеписанной окружности, касающейся стороны длиной a (рис. 365), связаны формулой $rr_a = (p - b)(p - c)$, где p — полупериметр треугольника.

1282. Докажите, что:

- сумма квадратов расстояний ортоцентра треугольника от его вершины и от противолежащей стороны равна квадрату диаметра описанной окружности;
- сумма трех слагаемых, каждое из которых есть произведение высоты остроугольного треугольника и расстояния ортоцентра до вершины, из которой проведена эта высота, равна полусумме квадратов сторон треугольника.

1283. Высота треугольника равна h , а отрезки, на которые противолежащая сторона разделяется основанием высоты — k и l . Найдите отрезки, на которые разделяется эта высота другой высотой треугольника.

1284. Стороны треугольника равны a, b, c . Найдите расстояния:

- а) от ортоцентра треугольника до его вершины A ;
- б) от центра окружности, описанной около треугольника, до его стороны AB ;
- в) от центра окружности, вписанной в треугольник, до его вершины A ;
- г) от центра J_A внеписанной окружности треугольника до его вершины A ;
- д) между центрами вписанной и трех внеписанных окружностей.

1285. Найдите разность квадратов диагоналей параллелограмма, учитывая, что:

- а) его внутренняя точка отстоит от вершин на a, b, c, d ;
- б) его стороны равны m и n , а площадь — S .

1286. Найдите площадь параллелограмма, учитывая, что его стороны равны m и n , а внутренняя точка отстоит от вершин на a, b, c, d .

1287. Основания трапеции равны a и b , а боковые стороны — c и d . Найдите:

- а) диагонали трапеции; б) площадь трапеции.

1288. Докажите, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон и удвоенного произведения оснований.

1289. Найдите площадь четырехугольника, учитывая, что его стороны равны a, b, c и d , а диагонали — k и l .

1290. Стороны вписанного четырехугольника равны a, b, c и d . Найдите его:

- а) диагонали; б) площадь.

1291. Докажите, что произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон (*теорема Птолемея*).

1292. Конец B хорды AB окружности с радиусом R является центром окружности с радиусом n , пересекающей данную окружность в точках P и Q (рис. 366). Найдите хорды AP и AQ , учитывая, что хорда AB равна m .

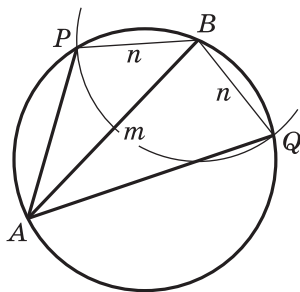


Рис. 366

1293. Установите, может ли:

- а) вписанный многоугольник иметь равные углы и неравные стороны;
- б) вписанный многоугольник иметь равные стороны и неравные углы;
- в) описанный многоугольник иметь равные углы и неравные стороны;
- г) описанный многоугольник иметь равные стороны и неравные углы.

1294. Найдите радиус каждого:

- а) из трех равных кругов, вписанных в круг с радиусом R и касающихся друг друга (рис. 367);
- б) из четырех равных кругов, каждый из которых касается круга с радиусом R и двух из этих равных кругов (рис. 368).

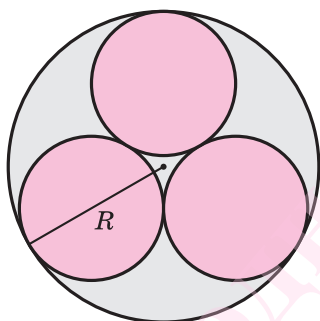


Рис. 367

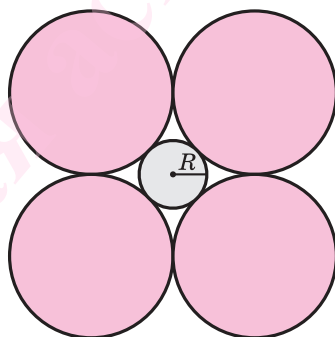


Рис. 368

1295. Выразите через радиус r окружности сторону правильного описанного около нее:

- а) треугольника;
- б) четырехугольника;
- в) шестиугольника;

1296. Найдите сторону и диагонали правильного вписанного в окружность с радиусом R :

- а) пятиугольника;
- б) десятиугольника.

1297. Найдите площадь правильного десятиугольника, учитывая, что его сторона равна a .

1298. Найдите сторону правильного вписанного в окружность с радиусом 1:

- а) двадцатиугольника;
- б) пятидесятиугольника.

1299. Используя рисунок 369, на котором около окружности описан квадрат и в нее вписан правильный шестиугольник, докажите, что число π заключено между числами 3 и 4.

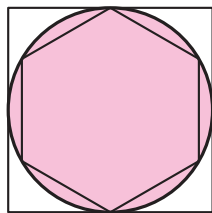


Рис. 369

1300. На сторонах угла A величиной 75° выбраны такие точки K и L , что $AK = 2$ и $AL = \sqrt{6}$. Точка M выбрана так, что $\angle KAM = 30^\circ$, $\angle LAM = 45^\circ$ и $AM = \sqrt{3}$. Докажите, что точки K, L, M лежат на одной прямой.

1301. Выясните, сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внутренних углов которого равен:

а) 135° ; в) 150° ; д) $128\frac{4}{7}^\circ$;

б) 144° ; г) 156° ; е) $163\frac{7}{11}^\circ$.

1302. Выясните, сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внешних углов которого равен:

а) 36° ; б) 24° ; в) $14,4^\circ$; г) $6\frac{2}{3}^\circ$.

1303. Постройте аккуратно правильный двенадцатиугольник и проведите все его диагонали. Найдите точки, через которые проходит точно:

а) три диагонали; б) четыре диагонали.

Обоснуйте полученные гипотезы.

1304. Через радиусы R и r описанной и вписанной окружностей выразите сторону a правильного:

- а) восьмиугольника;
- б) двенадцатиугольника;
- в) шестнадцатиугольника.

1305. Найдите число, 32 % которого равны $\left(\frac{6}{7} + \frac{6}{7 \cdot 13} - \frac{6}{13 \cdot 19}\right) \cdot 12\frac{2}{3} : 1,5$.

1306. Найдите значение выражения:

- а) $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$;
- б) $\sin(6 \arctg(-\sqrt{3}) + 4 \arctg \sqrt{5})$.

1307. Найдите:

а) значение выражения $\frac{x^4 - x^2 - 2x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \cdot \frac{x^4 + 2x^3 - x - 2}{x + 2}$ при $x = 1, 2$;

б) область определения функции $y = \frac{\sqrt{3 - 2x - x^2}}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}$.

1308. Укажите ближайшие целые числа, между которыми находится сумма корней (или корень, если он единственный) уравнения $\sqrt{x^2 - 1} = (2x + 3) \sqrt{\frac{x+1}{x+1}}$.

1309. Упростите выражение $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1 - \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

1310. Через 30 с после старта первого велосипедиста за ним выезжает второй со скоростью на 20 % большей и догоняет первого в 2 км от места старта. Найдите скорость первого велосипедиста.

1311. Найдите наименьшее значение переменной a , при котором прямая $y = a(x + 1)$ является касательной к параболе $y = x^2$.

1312. Функция $y = 0,5x^4 + x^3 - x^2$ задана на промежутке $[-3; 0]$. Найдите количество целых чисел в области ее значений.

1313. Выясните вид четырехугольника, около которого можно описать окружность, учитывая, что диагонали его точкой пересечения делятся пополам.

1314. Две окружности с радиусами 9 и 3 касаются внешним образом в точке Q , а M и N — точки касания их общей внешней касательной. Найдите площадь треугольника MNQ .

1315. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и $6\sqrt{5}$. Найдите расстояние до плоскости этого треугольника от точки, находящейся на расстоянии 15 от каждой вершины треугольника.

1316. Хорда AB окружности с центром Q и радиусом 12 имеет длину 6. Найдите расстояние от точки M прямой AB до середины хорды AB , учитывая, что $MQ = 16$.

1317. Основанием четырехугольной пирамиды является прямоугольник с диагональю $12\sqrt{3}$ и углом 60° между диагоналями. Найдите объем пирамиды, учитывая, что каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45° .

1318. Решите уравнение $f(x) = -1$, учитывая, что $f(x)$ — нечетная функция, которая при $x > 0$ задается формулой $f(x) = \log_5(1,5x)$. В ответ запишите число $9P$, где P — произведение корней уравнения.

1319. Найдите:

а) произведение $k \cdot x_0$, где k — количество корней, а x_0 — корень уравнения $\log_9(x - 2)^2 = \log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{2x - 1}$, принадлежащий промежутку $(1; +\infty)$;

б) произведение наименьшего целого положительного и наибольшего целого отрицательного решений неравенства $3 \cdot 16^x - 7 \cdot 12^x + 4 \cdot 9^x > 0$;

в) сумму $x_0 + y_0$, где (x_0, y_0) — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \log_4 (x + 2y)^{\frac{1}{y}} = 1, \\ (x + 2y) \cdot 5^y = 400. \end{cases}$$

г) произведение целых корней уравнения

$$\frac{3x^2 - 13x + 5}{x^2 - 1} = \frac{4x^2 - 13x + 1}{2x^2 - 5}.$$

д) произведение корней уравнения

$$\sqrt{x - 3} (6 - |x^2 - 3x - 4|) = 0.$$

е) произведение наименьшего и наибольшего целых решений неравенства $4^{-\log_4 \frac{27-x}{x+2}} > (x-3)(x-30)$.

ж) произведение корней (или корень, если он единственный) уравнения $x = (\sqrt{9+x} + 3)(\sqrt{9+x} + x^2 + 8x - 23)$.

1320. В двух колбах находилось 40 г и 60 г раствора соли различной концентрации. Из каждой колбы взяли по n г раствора и влили взятое из первой колбы во вторую, а взятое из второй колбы — в первую, после чего в обеих колбах концентрации сравнялись. Найдите n .

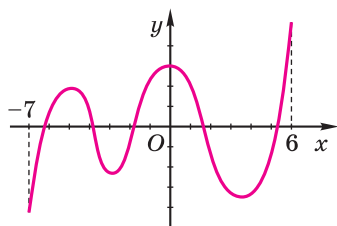


Рис. 370

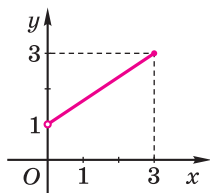


Рис. 371

1321. На промежутке $[-7, 6]$ задана функция графиком, представленным на рисунке 370. Найдите количество значений аргумента, при которых значения функции равны нулю.

1322. Нечетная функция имеет область определения промежутков $[-3; 3]$ и на промежутке $(0; 3]$ задана графиком, представленным на рисунке 371. Укажите количество целых значений этой функции.

1323. Найдите произведение наибольшего целого отрицательного и наименьшего целого положительного значений переменной x из области определения

$$y = \sqrt{1 + \frac{x}{x^2 - 5x + 4}}.$$

1324. Найдите число $x_0 - y_0$, учитывая, что $(x_0; y_0)$ — решение:

а) системы
$$\begin{cases} (x + y) \cdot 3^{y-x} = \frac{5}{27}, \\ 3 \log_5(x + y) = x - y; \end{cases}$$

б) неравенства $x^2 + 4xy + 13y^2 - 6y + 1 \leq 0$.

1325. Найдите сумму корней уравнения:

а) $\log_4 x^2 = 2$; б) $\sqrt[4]{77 + x} + \sqrt[4]{20 - x} = 5$.

* * *

1326. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке Q . Точки P и R выбраны так, что $BP \perp AC$, $CP \perp BD$, $AR \perp BD$ и $DR \perp AC$. Докажите, что точки P , Q и R лежат на одной прямой.

1327. Двухзначное число, умноженное на 100, разделили на двухзначное число. Выясните, какое наименьшее натуральное число может получиться в частном.

1328. Докажите, что неотрицательные числа a , b и c удовлетворяют неравенству

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a|b - c| + b|c - a| + c|a - b|.$$

24. Геометрические величины

В школьной математике изучают четыре величины — градусную меру угла, длину отрезка, площадь фигуры, объем тела.

Использование величины позволяет результат сравнения геометрической фигуры Φ с фигурой, с которой сопоставлено число 1, выразить определенным действительным числом r . Это сопоставление задает определенную функцию $r = f(\Phi)$. Выбор фигуры-эталона означает выбор единицы измерения. Кроме основной единицы, используют и производные от нее, которые в метрической системе мер образуются единообразно с помощью приставок греческого происхождения. Значения наиболее употребительных приставок приводятся в таблице.

Приставка	Обозначение	Множитель
гига	Г	10^9
мега	М	10^6
кило	к	10^3
гекто	г	10^2

Приставка	Обозначение	Множитель
деци	д	10^{-1}
санتي	с	10^{-2}
милли	м	10^{-3}
микро	мк	10^{-6}

С помощью функции $r = f(\Phi)$ можно так сформулировать общие свойства геометрических величин:

- результат измерения есть неотрицательное число, т. е. $f(\Phi) \geq 0$;
- если фигуры Φ_1 и Φ_2 равны, то результаты их измерения также равны, т. е. если $\Phi_1 = \Phi_2$, то $f(\Phi_1) = f(\Phi_2)$;
- если фигура Φ разделена на части Φ_1 и Φ_2 , то результат измерения фигуры Φ равен сумме результатов измерения фигур Φ_1 и Φ_2 , т. е. $f(\Phi) = f(\Phi_1) + f(\Phi_2)$.

Меры угла и дуги

Два луча с общим началом разделяют плоскость на две части (рис. 372), каждую из которых вместе с лучами называют *углом*, сами лучи — *сторонами* угла, а их общее начало — *вершиной* угла. Угол обозначают знаком $\angle$.

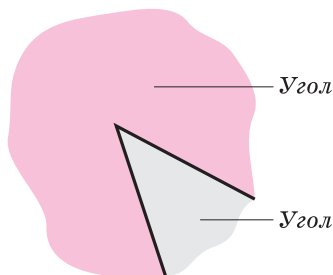


Рис. 372

Луч, выходящий из вершины угла и делящий его пополам, называют *биссектрисой угла* (рис. 373).

Угол, стороны которого являются противоположными лучами, называют *развернутым*, его стовосьмидесятую долю называют *градусом* и обозначают $^{\circ}$. Градус есть единица измерения величины, называемой *градусной мерой угла*. Шестидесятую долю градуса называют *минутой*, шестидесятую долю минуты — *секундой*. Минуту обозначают знаком $'$, секунду — знаком $''$.

Угол, равный своему смежному углу, называют *прямым*, это показывают так, как на рисунке 374.

Угол, который меньше прямого, называют *острым*, а угол, который больше прямого и меньше развернутого, — *тупым*.

Угол можно рассматривать как меру поворота луча OM вокруг своего начала O от некоторого первоначального его положения OM_0 . Тогда четверть полного оборота дает прямой угол (рис. 375), полный оборот — угол величиной 360° (рис. 376), а два полных оборота — угол величиной 720° (рис. 377).

При измерении углов, связанных с окружностью, пользуются понятием градусной меры дуги. *Градусной мерой дуги* окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла. Например, градусная мера четверти окружности равна 90° , полуокружности — 180° , трех четвертей окружности — 270° , всей окружности — 360° (рис. 378).

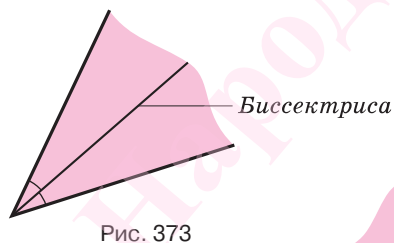


Рис. 373

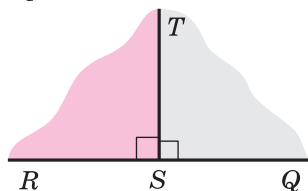


Рис. 374

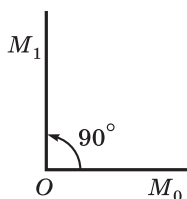


Рис. 375



Рис. 376

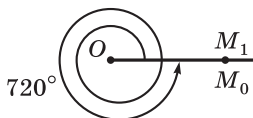


Рис. 377

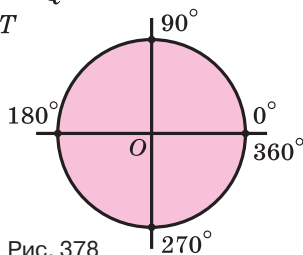


Рис. 378

Еще одной единицей угла является *град*, под ним понимают сотую долю прямого угла.

Важным для математики является радианное измерение углов. Пусть зафиксирована одна из сторон угла. Если вращать другую его сторону вокруг вершины, то образуется некоторый угол. Отношение пути s , который описывает произвольная точка M луча при вращении вокруг его начала O , к отрезку OM равно $\frac{\pi\alpha}{180}$, т. е. не зависит от выбора точки M (рис. 379). Поэтому это отношение принимается за меру угла. Количественно она равна пути, пройденному точкой по единичной окружности. Развернутому углу соответствует половина длины единичной окружности, т. е. число π (рис. 380). Прямой угол равен $\frac{\pi}{2}$ (рис. 381), угол правильного треугольника — $\frac{\pi}{3}$ (рис. 382). Угол, мера которого равна числу 1, называется **радианом** (рис. 383). Угол в 1 радиан вырезает из окружности дугу, равную радиусу этой окружности (рис. 384).

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радиан} \approx 0,017453 \text{ радиан};$$

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,2958^\circ \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Принято обозначение радиана в записи меры угла опускать. Запись вида $\alpha = 1,23$ означает, что величина угла α равна 1,23 радиана.

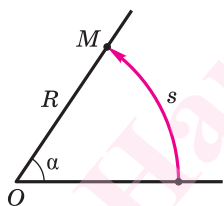


Рис. 379

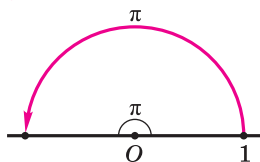


Рис. 380

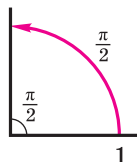


Рис. 381

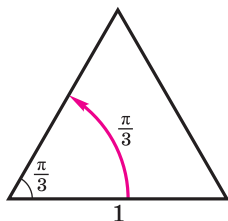


Рис. 382

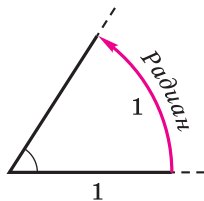


Рис. 383

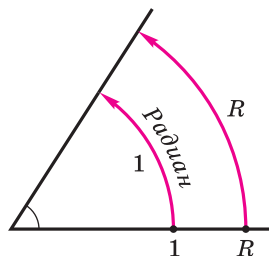


Рис. 384

Соответствие между градусной и радианной мерами для часто используемых углов дается следующей таблицей.

Градусы	30	45	60	90	120	135	150	180
Радианы	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Градусы	210	225	240	270	300	315	330	360
Радианы	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Углом между пересекающимися прямыми называется один из четырех образованных ими углов, не больший 90° (рис. 385).

Угол между параллельными прямыми принимается равным нулю (рис. 386).

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, им параллельными (рис. 387).

Углом между пересекающимися прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 388).

Угол между параллельными прямой и плоскостью принимается равным нулю.

Две полуплоскости с общей границей разделяют пространство на две части (рис. 389), каждую из которых вместе с полуплоскостями называют *двугранным углом*, сами полуплоскости — *гранями* двугранного угла, а их общую пря-



Рис. 385

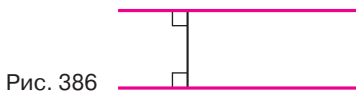


Рис. 386

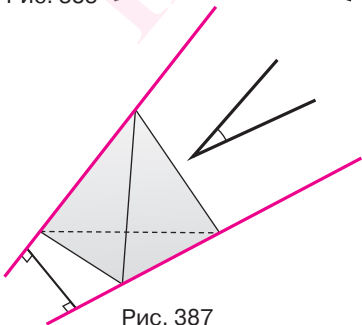


Рис. 387

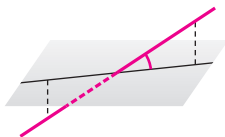


Рис. 388

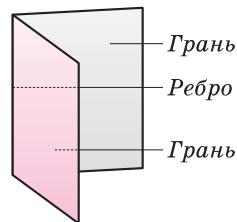


Рис. 389

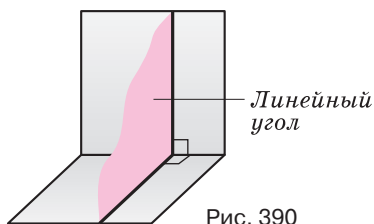


Рис. 390

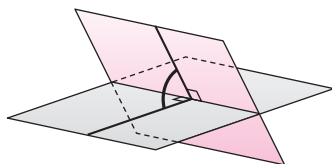


Рис. 391

мую — *ребром* двугранного угла. *Линейным углом двугранного угла* называют плоский угол, возникающий при пересечении двугранного угла с плоскостью, перпендикулярной его ребру (рис. 390). Все линейные углы двугранного угла равны друг другу. Двугранный угол измеряется своим линейным углом.

Углом между пересекающимися плоскостями называется один из четырех образованных ими двугранных углов, не больший 90° (рис. 391).

Угол между параллельными плоскостями принимается равным нулю.

Сумма углов многоугольника, как выпуклого, так и невыпуклого, с количеством сторон n равна $180^\circ \cdot (n - 2)$.

Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360° .

Длина отрезка. Расстояние

Две точки M и N прямой разделяют ее на три части (рис. 392), которые вместе с точками M и N образуют луч с началом в точке M , луч с началом в точке N и *отрезок* MN . Если выбрать *единицу длины*, то можно измерить *длину отрезка*. В качестве единицы длины принят *метр*, под которым понимают путь, пройденный в вакууме светом за $\frac{1}{299792458}$ долю секунды.

С длиной отрезка связана еще одна величина — *расстояние*.

Из точки A в точку B можно попасть разными путями (рис. 393). Кратчайшим из них является путь 2

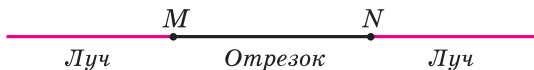


Рис. 392

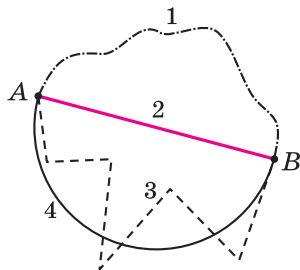


Рис. 393

по отрезку AB . *Расстоянием между точками* называется длина отрезка, их соединяющего.

Наименьшим расстоянием от точки E до прямой l является расстояние до точки P — основания перпендикуляра EP (рис. 394). *Расстоянием между точкой и прямой* называется длина перпендикуляра, проведенного из точки на прямую.

Любые две точки одной из параллельных прямых равноудалены от другой прямой (рис. 395). *Расстоянием между параллельными прямыми* называется расстояние от какой-либо точки одной прямой до другой прямой.

Две скрещивающиеся прямые имеют единственный общий перпендикуляр (рис. 396). *Расстоянием между скрещивающимися прямыми* называется длина их общего перпендикуляра.

Перпендикуляр к плоскости, проведенный из некоторой точки, меньше любой наклонной к этой плоскости, проведенной из той же точки. *Расстоянием от точки до плоскости* называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости (рис. 397).

Расстояние от любой точки прямой, параллельной плоскости, до этой плоскости одно и то же и равно длине перпендикуляра, проведенного из какой-либо точки прямой к плоскости (рис. 398). *Расстоянием между параллельными прямой и плоскостью* называется длина перпендикуляра, проведенного из какой-либо точки прямой к плоскости.

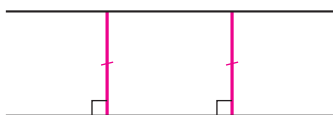
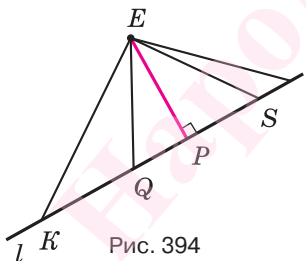


Рис. 395

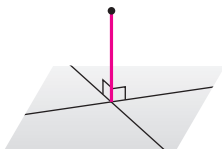


Рис. 397

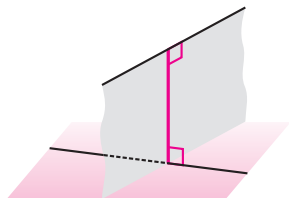


Рис. 396

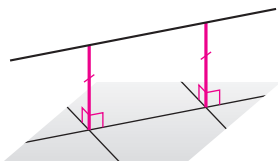


Рис. 398

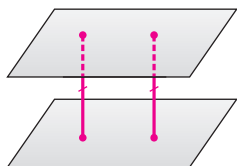


Рис. 399

Рис. 400

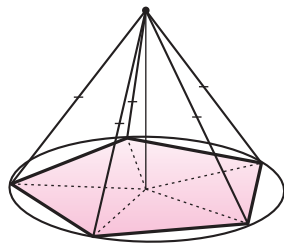
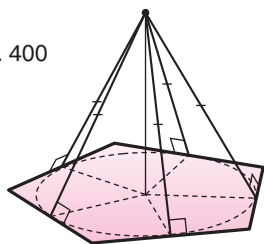
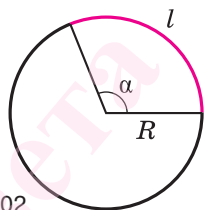


Рис. 401

Рис. 402



Расстояние от любой точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости одно и то же и равно длине их общего перпендикуляра (рис. 399). *Расстоянием между параллельными плоскостями* называется длина перпендикуляра, проведенного из какой-либо точки одной плоскости к другой плоскости.

Если данная точка пространства равноудалена от сторон многоугольника, то в этот многоугольник можно вписать окружность, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость многоугольника (рис. 400).

Если данная точка пространства равноудалена от вершин многоугольника, то около этого многоугольника можно описать окружность, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость многоугольника (рис. 401).

Длина C окружности с радиусом R выражается формулой $C = 2\pi R$. Длина l дуги окружности с радиусом R и радианной мерой α выражается формулой $l = R\alpha$ (рис. 402).

Площадь фигуры

Если выбрать *единицу площади*, то можно измерить *площадь фигуры*. В качестве единицы площади можно принять *квадратный метр*, под которым понимают площадь квадрата со стороной, равной 1 м.

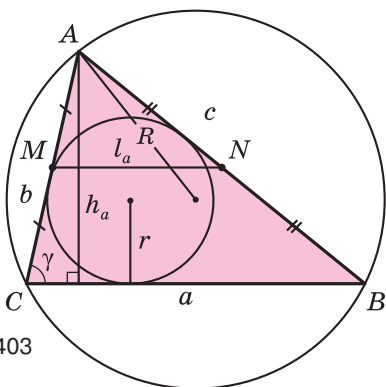


Рис. 403

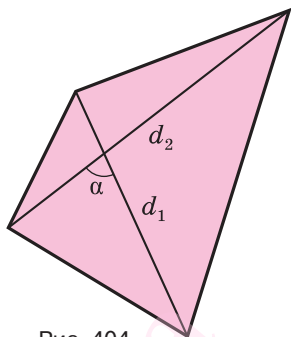


Рис. 404

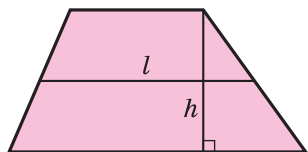


Рис. 405

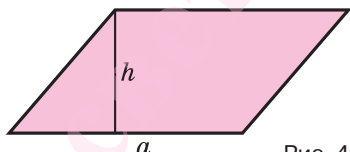


Рис. 406

Площадь треугольника (рис. 403) равна:

- половине произведения стороны и проведенной к ней высоты: $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$;
- произведению высоты треугольника и перпендикулярной ей средней линии: $S = h_a \cdot l_a$;
- половине произведения двух его сторон и синуса угла между ними: $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$;
- квадратному корню из произведения полупериметра и трех разностей полупериметра с каждой стороной: $p = \frac{1}{2} (a + b + c)$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;
- произведению полупериметра и радиуса вписанной окружности: $S = pr$;
- произведению трех сторон треугольника, разделенному на учетверенный радиус описанной окружности: $S = \frac{abc}{4R}$.

Площадь четырехугольника (рис. 404) равна половине произведения его диагоналей и синуса угла между ними: $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$.

Площадь трапеции (рис. 405) равна произведению ее средней линии и высоты: $S = l \cdot h$.

Площадь параллелограмма (рис. 406) равна произведению стороны и проведенной к ней высоты: $S = a \cdot h$.

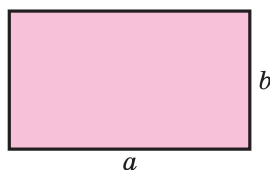


Рис. 407

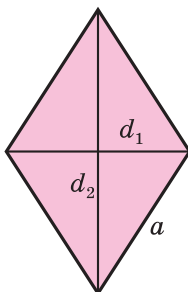


Рис. 408

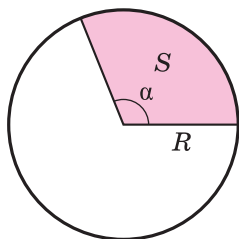


Рис. 409

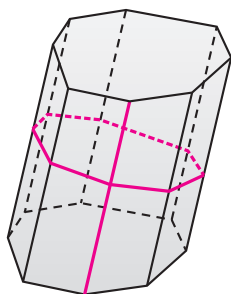


Рис. 410

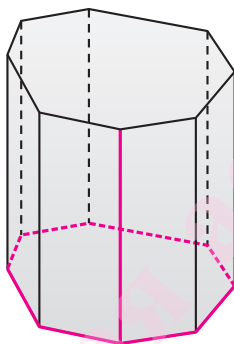


Рис. 411



Рис. 412

Площадь прямоугольника (рис. 407) равна произведению его смежных сторон: $S = a \cdot b$.

Площадь ромба (рис. 408) равна половине произведения диагоналей: $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$.

Площадь круга с радиусом R выражается формулой $S = \pi R^2$. Площадь сектора с радиусом R и центральным углом (рис. 409), радианная мера которого равна α , $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, выражается формулой $S = \frac{1}{2} R^2 \alpha$.

Площадь S боковой поверхности призмы (рис. 410) равна произведению периметра P ее перпендикулярного сечения и длины l бокового ребра.

Площадь боковой поверхности прямой призмы (рис. 411) равна произведению периметра ее основания и высоты: $S = P_{\text{осн}} \cdot h$.

Площадь боковой поверхности цилиндра (рис. 412) равна произведению длины окружности основания и высоты: $S = C \cdot h$.

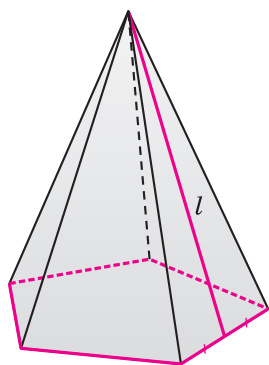


Рис. 413

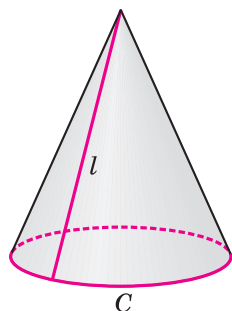


Рис. 415

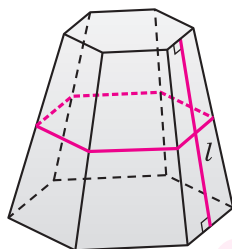


Рис. 414

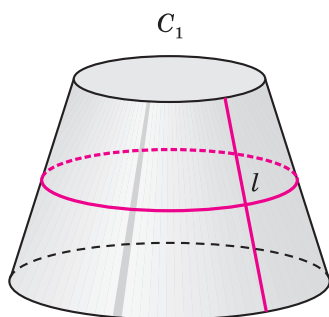


Рис. 416

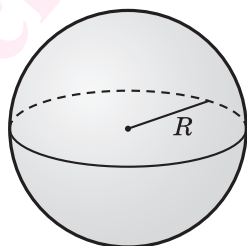


Рис. 417

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды (рис. 413) равна произведению полупериметра ее основания и апофемы: $S = p \cdot l$.

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды (рис. 414) равна произведению полусуммы периметров ее оснований и апофемы: $S = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l$.

Площадь боковой поверхности конуса (рис. 415) равна произведению половины длины окружности его основания и образующей: $S = \frac{1}{2} C \cdot l$.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса (рис. 416) равна произведению полусуммы длин окружностей его оснований и образующей: $S = \frac{C_1 + C_2}{2} \cdot l$.

Площадь сферы (рис. 417) равна учетверенной площади большого круга: $S = 4\pi R^2$.

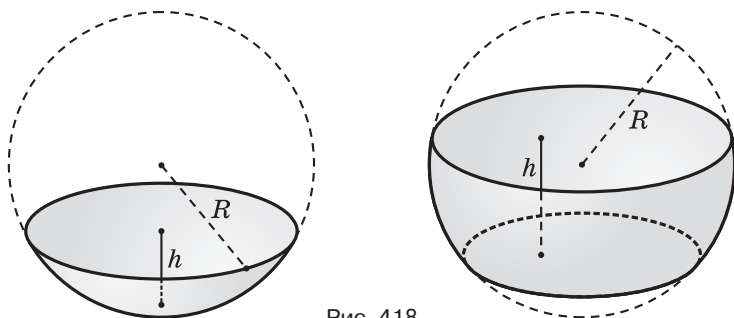


Рис. 418

Площадь сферического сегмента, как и сферического пояса (рис. 418), равна произведению длины окружности большого круга и высоты соответствующего тела: $S = 2\pi Rh$.

Объем тела

Если выбрать единицу объема, то можно измерить объем тела. В качестве единицы объема можно принять кубический метр, под которым понимают объем куба с ребром 1 м.

Объем прямоугольного параллелепипеда (рис. 419) равен:

- произведению трех его измерений: $V = abc$;
- произведению площади его основания и высоты: $V = Sh$.

Объем произвольного параллелепипеда (рис. 420) равен произведению площади его основания и высоты: $V = Sh$.

Объем призмы (рис. 421) равен произведению площади ее основания и высоты: $V = Sh$.

Объем прямой призмы (рис. 422) равен произведению площади ее основания и бокового ребра: $V = Sl$.

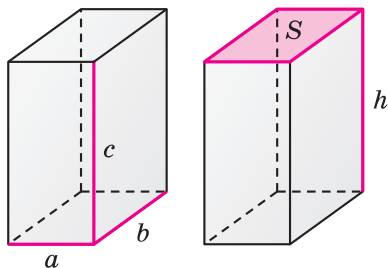


Рис. 419

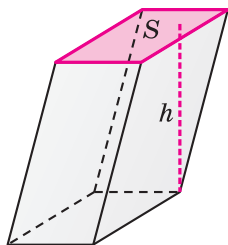


Рис. 420

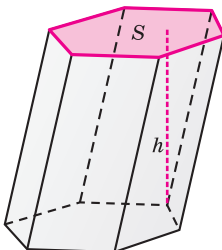


Рис. 421

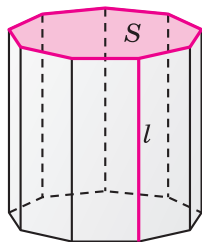


Рис. 422

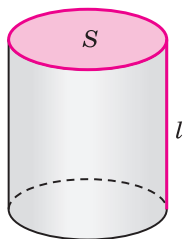


Рис. 423

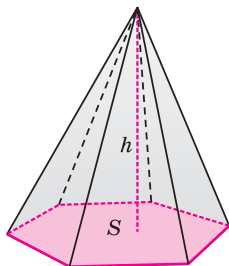


Рис. 424

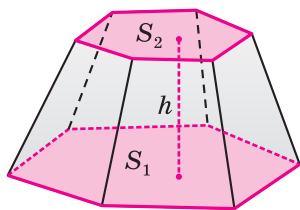


Рис. 425

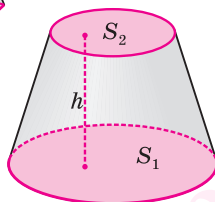


Рис. 427

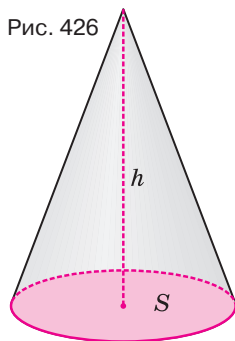


Рис. 426

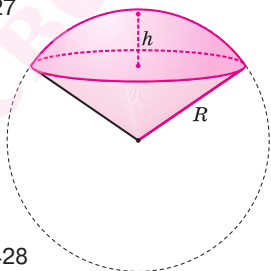
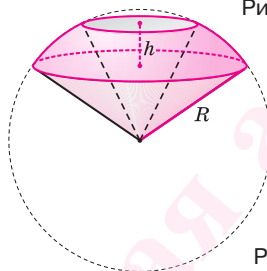


Рис. 428

Объем цилиндра (рис. 423) равен произведению площади его основания и образующей: $V = Sl$.

Объем пирамиды (рис. 424) равен третьей доле произведения площади ее основания и высоты: $V = \frac{1}{3}Sh$.

Объем усеченной пирамиды (рис. 425) равен третьей доле произведения высоты пирамиды и суммы площадей оснований пирамиды и их среднего геометрического: $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})$.

Объем конуса (рис. 426) равен третьей доле произведения площади его основания и высоты: $V = \frac{1}{3}Sh$.

Объем усеченного конуса (рис. 427) равен третьей доле произведения высоты конуса и суммы площадей оснований конуса и их среднего геометрического: $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})$.

Объем шарового сектора (рис. 428) равен третьей доле произведения поверхности соответствующего сферического пояса или сегмента и радиуса: $V = \frac{1}{3} \cdot 2\pi Rh \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^2h$.

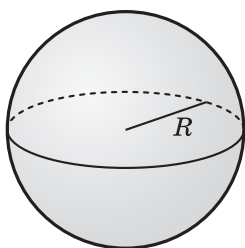


Рис. 429

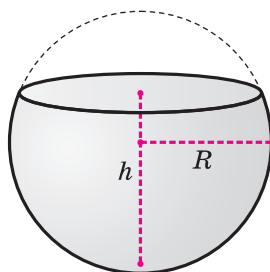


Рис. 430

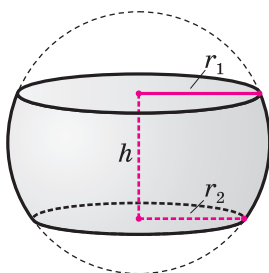


Рис. 431

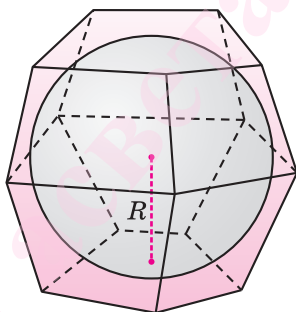


Рис. 432

Объем шара (рис. 429) равен третьей доле произведения его поверхности и радиуса: $V = \frac{1}{3} \cdot 4\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Объем шарового сегмента (рис. 430) с радиусом R и высотой h выражается формулой $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$.

Объем V шарового слоя (рис. 431) с радиусом R , радиусами оснований r_1 и r_2 и высотой h выражается формулой $V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$.

Объем описанного около шара многогранника (рис. 432) равен третьей доле произведения его полной поверхности S и радиуса r шара: $V = \frac{1}{3}Sr$.

- ?
1. Что такое единица измерения и как из основной единицы некоторой величины образуются ее новые единицы?
 2. Сформулируйте основные свойства величины.
 3. Какую фигуру называют углом и что называют его сторонами и вершиной?
 4. Какой луч называют биссектрисой угла?
 5. Какой угол называют прямым; острым; тупым; развернутым?
 6. Как называют величину, с помощью которой измеряют углы?

7. Как называют основную единицу измерения углов и как она определяется?
8. Назовите производные единицы измерения угла и укажите, как они связаны с основной единицей.
9. Какой смысл имеют углы с градусной мерой больше 360° ?
10. Что называют градусной мерой дуги?
11. Какая единица измерения углов называется радианом и как радиан связан с градусом?
12. Что называют углом между пересекающимися прямыми; между скрещивающимися прямыми?
13. Что называют углом между пересекающимися прямой и плоскостью; пересекающимися плоскостями?
14. Что принимают за величину угла между параллельными прямыми; между параллельными прямой и плоскостью; между параллельными плоскостями?
15. Что называют двугранным углом; гранями двугранного угла; ребром двугранного угла?
16. Какой угол называют линейным углом двугранного угла и какое свойство имеют линейные углы одного и того же двугранного угла?
17. Что принимают за меру двугранного угла?
18. Чему равна сумма внутренних углов плоского многоугольника?
19. Какому условию удовлетворяет сумма плоских углов выпуклого многогранного угла?
20. Какую фигуру называют отрезком?
21. Как называют величину, с помощью которой измеряют отрезки?
22. Назовите употребительные единицы измерения длины и укажите, как они связаны друг с другом.
23. Что называют расстоянием между двумя точками; расстоянием между точкой и прямой?
24. Что называют расстоянием между параллельными прямыми; расстоянием между параллельными прямой и плоскостью; расстоянием между параллельными плоскостями?
25. Сформулируйте свойство многоугольника, для которого существует точка пространства, равноудаленная от всех вершин многоугольника.
26. Сформулируйте свойство многоугольника, для которого существует точка пространства, равноудаленная от всех сторон многоугольника.
27. Чему равна длина окружности с радиусом R ; длина дуги окружности с радиусом R и радианной мерой α ?
28. Как называют величину, с помощью которой измеряют поверхности?
29. Как называют основную единицу измерения площади и как она определяется?
30. Назовите производные единицы измерения площади и укажите, как они связаны с основной единицей.
31. Скажите, как площадь треугольника выражается через сторону и проведенную к ней высоту; через среднюю линию и высоту; через две стороны и угол между ними; через стороны; через полупериметр и радиус вписанной окружности; через стороны и радиус описанной окружности.

32. Скажите, как площадь четырехугольника выражается через его диагонали и угол между ними.
33. Скажите, как площадь трапеции выражается через среднюю линию и высоту.
34. Скажите, как площадь параллелограмма выражается через его сторону и проведенную к ней высоту.
35. Скажите, как площадь прямоугольника выражается через его стороны.
36. Скажите, как площадь ромба выражается через его диагонали.
37. Чему равна площадь круга с радиусом R ; площадь сектора с радиусом R и центральным углом, радианная мера которого равна α ?
38. Чему равна площадь боковой поверхности призмы; прямой призмы; цилиндра?
39. Чему равна площадь боковой поверхности правильной пирамиды; конуса; правильной усеченной пирамиды; усеченного конуса?
40. Чему равна площадь сферы?
41. Как называют величину, с помощью которой измеряют тела?
42. Как называют основную единицу измерения объемов и как она определяется?
43. Назовите производные единицы измерения объемов и укажите, как они связаны с основной единицей.
44. Чему равен объем прямоугольного параллелепипеда; произвольного параллелепипеда?
45. Чему равен объем призмы; прямой призмы; цилиндра?
46. Чему равен объем пирамиды; конуса?
47. Чему равен объем шара?
48. Как объем описанного около шара многогранника связан с его поверхностью и радиусом шара?

1329. Три прямые a , b , c пересекаются в одной точке, причем прямая a составляет с прямой b угол в 20° , а с прямой c — угол в 72° . Найдите:

- а) угол между прямыми b и c ;
- б) угол между биссектрисами углов, которые прямая c составляет с прямыми a и b , причем эти углы расположены по одну сторону от прямой c .

1330. Найдите наименьшее и наибольшее расстояния:

- а) точки M от точек окружности с радиусом r , учитывая, что точка M удалена от центра окружности на a ;
- б) между точками окружностей с радиусами r_1 и r_2 , учитывая, что расстояние между их центрами равно d ;
- в) между точками прямой и окружности с радиусом r , учитывая, что прямая удалена от центра окружности на d .

1331. Опишите способ деления:

- а) треугольника на два равновеликих треугольника одной прямой;
- б) параллелограмма двумя прямыми, которые проходят через произвольную точку на его диагонали, так, что части, расположенные по разные стороны диагонали, попарно равновелики;
- в) прямоугольника на равновеликие фигуры прямой, не проходящей через вершину.

1332. Найдите стороны прямоугольника, учитывая, что одна из них относится к его диагонали как $5 : 13$, а диагональ квадрата, равновеликого прямоугольнику, равна $4\sqrt{30}$ см.

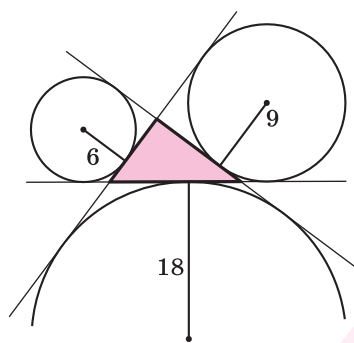


Рис. 433

1333. Найдите стороны треугольника, учитывая, что:

- а) одна из них меньше в два раза второй и на 4 см третьей, а площадь треугольника равна $4\sqrt{5}$ см²;
- б) радиусы вневписанных окружностей равны 6 см, 9 см и 18 см (рис. 433).

1334. Найдите отношение сторон прямоугольника, площадь которого составляет 75 % площади квадрата с периметром, равным периметру прямоугольника.

1335. Найдите площади двух подобных прямоугольников, на которые разделен прямоугольник со сторонами 4 м и 17 м.

1336. Найдите перпендикуляры, опущенные на стороны равностороннего треугольника длиной 24 см из его внутренней точки, учитывая, что они относятся как $1 : 2 : 3$.

1337. Найдите сторону ромба, диагонали которого относятся как $m : n$, а площадь равна S .

1338. Найдите сторону треугольника, учитывая, что:

- а) две другие его стороны равны 5 см и 6 см, а площадь треугольника — 12 см².
- б) две другие его стороны равны 10 м и 17 м, а радиус описанной окружности — $10\frac{5}{8}$ м.

1339. Найдите площади треугольников, на которые треугольник со сторонами 13 см, 14 см, 15 см разделяется:

- а) своими медианами;
- б) медианой и высотой, проведенными к средней по длине стороне.

1340. Внутренняя точка треугольника со сторонами 4 см, 13 см, 15 см отстоит на 5 см от первой стороны и на 1 см от второй. Найдите ее расстояние от третьей стороны.

1341. Найдите стороны треугольника, учитывая, что отрезки, соединяющие центр вписанной окружности с вершинами треугольника, разделяют его на треугольники с площадями 12 см^2 , 39 см^2 и 45 см^2 .

1342. Найдите площадь треугольника, у которого:

- а) две стороны вместе составляют 15 см, а проведенные к ним высоты равны 4 см и 6 см;
- б) две стороны равны 5 см и 7 см, а угол против одной из них — 45° ;
- в) две стороны равны 27 см и 29 см, а медиана к третьей стороне — 26 см;
- г) две вершины являются основаниями высот, проведенных к двум большим сторонам треугольника со сторонами 65 см, 70 см, 75 см, а третья вершина является вершиной данного треугольника (рис. 434), из которой выходит его третья высота;
- д) одна сторона равна 10 см, а медианы, проведенные к двум другим сторонам, — 9 см и 12 см;
- е) медианы равны 9 см, 12 см, 15 см.

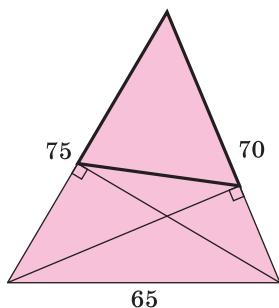


Рис. 434

1343. Найдите биссектрису угла треугольника, учитывая, что этот угол равен 120° , а прилежащие к нему стороны — 6 см и 12 см.

1344. Найдите отрезки, на которые разделяет сторону треугольника его биссектриса длиной 24 см, проведенная из вершины, в которой сходятся стороны длиной 20 см и 45 см.

1345. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков, на которые делит его гипотенузу точка касания с вписанной в треугольник окружностью.

1346. Из треугольника ABC со сторонами 13 см, 37 см и 40 см вырезан треугольник KLM , площадь которого составляет шестнадцатую долю площади треугольника ABC , а стороны

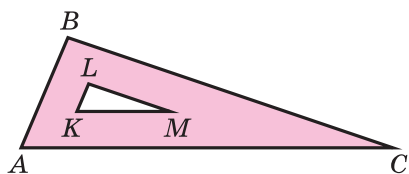


Рис. 435

параллельны сторонам треугольника ABC и равноудалены от них (рис. 435). Найдите расстояние между параллельными сторонами треугольников.

1347. Стороны AB , BC , CD , DA четырехугольника равны 17 см, 25 см, 26 см, 30 см, а диагональ AC — 28 см. Найдите площадь четырехугольника и его диагональ BD .

1348. Найдите площадь трапеции, у которой:

- а) основания равны 142 см и 89 см, а диагонали — 120 см и 153 см;
- б) высота равна 12 см, а диагонали — 20 см и 15 см;
- в) основания равны 6 см и 20 см, а боковые стороны — 13 см и 15 см.

1349. Основания трапеции равны 5 см и 11 см, а высота — 5 см. Определите, на каком расстоянии от меньшего основания нужно провести прямую, параллельную ему, чтобы площадь трапеции разделилась в отношении 9 : 8, если считать от меньшего основания.

1350. Прямая, проведенная через вершину тупого угла трапеции параллельно боковой стороне, разделяет основание в отношении 1 : 2. Найдите:

- а) основания трапеции, учитывая, что площадь отделенного треугольника равна 6 см^2 , а высота трапеции — 3 см;
- б) большее основание трапеции, учитывая, что ее средняя линия равна 15 см.

1351. Найдите большую сторону трапеции, учитывая, что три ее стороны равны друг другу, площадь равна 8 см^2 , а острый угол — 30° .

1352. Определите, на каком расстоянии от вершины треугольника с высотой 4 см нужно провести прямую, параллельную стороне, к которой проведена эта высота, чтобы площадь треугольника разделилась в отношении $m : n$, если считать от вершины.

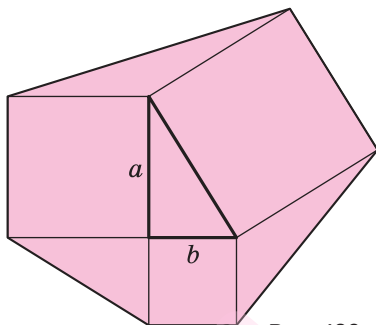


Рис. 436

1353. На сторонах прямоугольного треугольника с катетами a и b построены квадраты и свободные их вершины соединены (рис. 436). Найдите площадь полученного шестиугольника.

1354. Точка P стороны AB треугольника ABC делит ее в отношении $m : n$, а точки Q и R сторону BC — в отношении $i : j : k$. Найдите, в каком отношении площадь треугольника разделяется прямыми PQ и PR .

1355. Одна сторона треугольника с площадью S разделена на n долей прямыми, параллельными другой стороне, и из обоих концов каждого из параллельных отрезков, заключенных между сторонами треугольника, опущены перпендикуляры на следующую прямую (рис. 437). Найдите площадь фигуры, образованной полученными прямоугольниками.

1356. Определите, в каком отношении, если считать от вершины, нужно разделить сторону треугольника двумя прямыми, параллельными другой стороне, чтобы треугольник разделился на равновеликие части.

1357. Каждая сторона треугольника с площадью Q разделена в отношении $m : n : m$. Найдите площадь шестиугольника, вершинами которого являются точки деления.

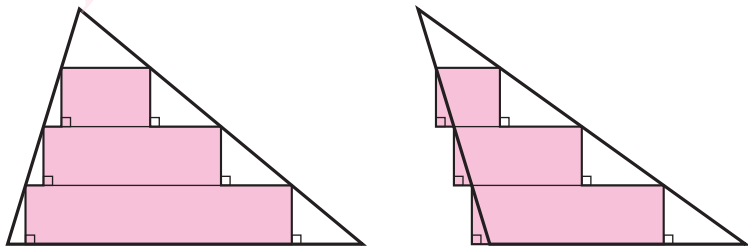


Рис. 437

1358. Определите, в каком отношении диагоналями делится на четыре части площадь трапеции, основания которой относятся как $m : n$.

1359. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ выбраны соответственно такие точки M и N , что $AM : MB = k$ и $AN : ND = l$. Найдите, какую часть площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь четырехугольника $AMPN$, учитывая, что P — точка пересечения прямых BN и DM .

1360. Определите, существует ли треугольник, высоты которого равны:

- а) 3 см, 4 см и 5 см; б) 1 см, 1 см и 3 см;
в) 5 см, 10 см и 12 см.

1361. Точки G_1, G_2, G_3 являются проекциями центра тяжести G прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C на стороны BC, AC, AB соответственно (рис. 438). Докажите, что площадь треугольника GG_1G_2 равна площади четырехугольника $GG_1G_3G_2$.

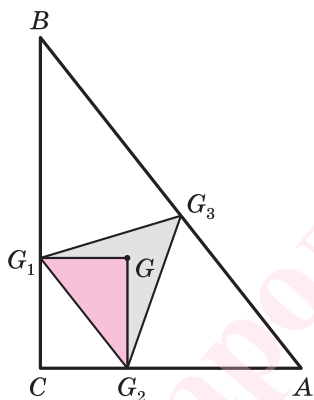


Рис. 438

1362. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC и разделяющая его медиану BG в отношении $1 : 2$, если считать от вершины, пересекает сторону BC в точке K . Определите, какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника ABK .

1363. Прямые, проходящие через концы основания равнобедренного треугольника и середину его высоты, проведенной к основанию, разделяют треугольник на три треугольника и четырехугольник (рис. 439). Найдите, какую часть каждый из них составляет от площади данного треугольника.

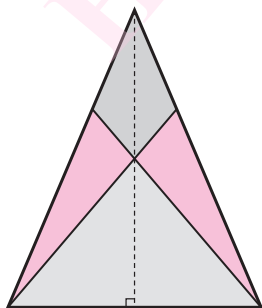


Рис. 439

1364. Докажите, что треугольники ABM и CBM , где M — внутренняя точка треугольника ABC , равновелики тогда и только тогда, когда точка M является точкой медианы BB_1 .

1365. Докажите, что площадь трапеции равна:

- а) удвоенной площади треугольника, вершинами которого являются концы одной боковой стороны и середина другой;
- б) произведению одной боковой стороны и перпендикуляра к ней, опущенного из середины другой боковой стороны.

1366. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны:

- а) 6 и 8, а отрезок, соединяющий середины оснований, — 5;
- б) m и n , а средняя линия — l .

1367. Докажите, что:

- а) два четырехугольника, середины сторон которых совпадают (рис. 440), равновелики;
- б) если середины M и N сторон BC и AD четырехугольника $ABCD$ соединить с его вершинами (рис. 441), то суммарная площадь треугольников ABN и CDN равна площади треугольника ADM ;
- в) если M и N — такие точки сторон AB и DC четырехугольника $ABCD$, что $AM : BM = CN : DN$, а P и Q — точки пересечения отрезка AN с отрезком DM и отрезка CM с отрезком BN соответственно (рис. 442), то площадь четырехугольника $MQNP$ равна суммарной площади треугольников APD и BQC ;
- г) если M и N — точки, делящие сторону AB четырехугольника $ABCD$ на три доли, а P и Q — точки, делящие сторону DC также на три доли (рис. 443), то площадь четырехугольника $MNPQ$ равна третьей доле площади данного четырехугольника.

Рис. 440

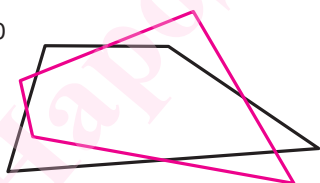


Рис. 441

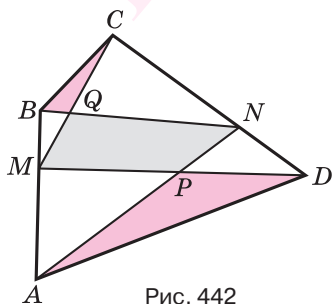
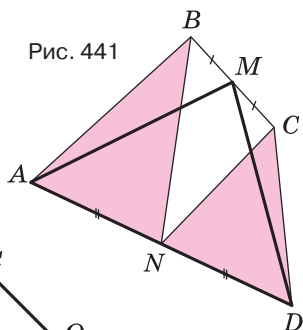


Рис. 442

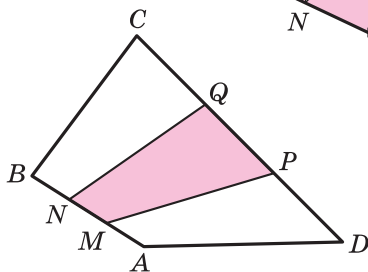


Рис. 443

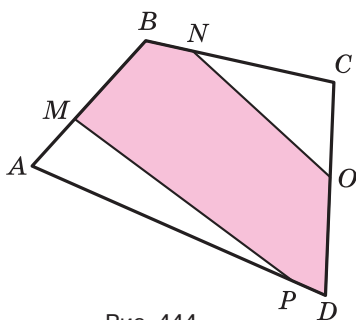


Рис. 444

1368. M, N, O, P — такие точки сторон четырехугольника $ABCD$, что $AM : BM = 3 : 5$, $BN : CN = 1 : 3$, $CO : DO = 4 : 5$, $DP : AP = 1 : 8$. Определите, какую часть площадь шестиугольника $MBNODP$ (рис. 444) составляет от площади данного четырехугольника, и установите, при любых ли отношениях $AM : BM, BN : CN, CO : DO, DP : AP$ задача имеет решение.

1369. Найдите площадь каждого из треугольников, на которые разделяется четырехугольник с площадью 45 м^2 точкой пересечения диагоналей, учитывая, что эта точка разделяет их в отношении $2 : 3$ и $4 : 5$.

1370. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, у которого противоположные стороны AB и CD длиной соответственно 2 и 4 перпендикулярны, а стороны AD и BC равны 5 и 7 соответственно.

1371. Прямые, проходящие через вершины C и D четырехугольника $ABCD$ и соответственно параллельные прямым BD и BC , пересекаются в точке E . Докажите, что треугольник ACE равновелик данному четырехугольнику.

1372. Внутреннюю точку параллелограмма соединили с его вершинами. Докажите, что сумма площадей треугольников, прилежащих к одной паре противоположных сторон, равна сумме площадей треугольников, прилежащих к другой паре сторон.

1373. Через середину каждой диагонали четырехугольника провели прямую, параллельную другой диагонали, и через точку пересечения этих прямых и середину каждой стороны четырехугольника провели прямые. Докажите, что они разделили четырехугольник на равновеликие четырехугольники.

1374. Прямая, параллельная стороне треугольника, разделила его на равновеликие части. Выясните, в каком отношении эта прямая разделила две другие стороны.

1375. Каждая из сторон AB и DC параллелограмма $ABCD$ разделена на m равных отрезков, а каждая из двух других сторон — на n равных отрезков. Начало первого, второго и т. д. отрезков на стороне AB , считая от вершины A , соеди-

нили с концом первого, второго и т. д. отрезков на стороне CD , считая от вершины D . Также конец первого, второго и т. д. отрезков на стороне AD , считая от вершины A , соединили с началом первого, второго и т. д. отрезков на стороне BC , считая от вершины B . В результате параллелограмм разделили на треугольники, трапеции и параллелограммы (рис. 445). Выясните, какую часть площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь одного такого параллелограмма.

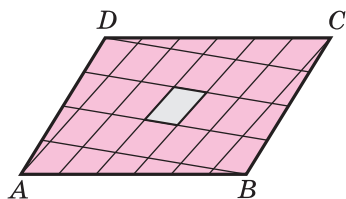


Рис. 445

1376. Каждая вершина параллелограмма соединена с серединой двух противоположных сторон. Выясните, какую часть площади параллелограмма составляет площадь восьмиугольника, ограниченного этими отрезками (рис. 446).

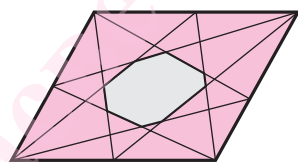


Рис. 446

1377. Из четырех треугольников, на которые разделена трапеция своими диагоналями, треугольники, прилежащие к основаниям, имеют площади S_1 и S_2 . Найдите площадь трапеции.

1378. Прямая, параллельная стороне треугольника с площадью S , отсекает от него треугольник с площадью Q . Найдите площадь четырехугольника, три вершины которого совпадают с вершинами меньшего треугольника, а четвертая лежит на стороне большого треугольника.

1379. Найдите все такие внутренние точки X треугольника ABC , что треугольники XAB и XAC равновелики.

1380. Используя площади, докажите теорему о точке пересечения медиан треугольника.

1381. В круг с радиусом R вписаны три равных круга, касающиеся друг друга. Найдите площадь той части большого круга, которая не покрывается вписанными кругами (рис. 447).

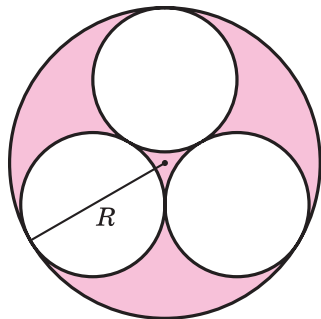


Рис. 447

1382. Катеты прямоугольного треугольника относятся как $5:6$, а гипотенуза равна 122 см. Найдите проекции катетов на гипотенузу.

1383. Один катет прямоугольного треугольника с периметром 84 см равен 35 см. Найдите гипотенузу.

1384. Докажите, что сумма величин, обратных квадратам катетов прямоугольного треугольника, равна величине, обратной квадрату высоты, проведенной к гипотенузе.

1385. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 см и 35 см. Найдите медиану, проведенную из вершины прямого угла.

1386. Найдите радиус окружности, описанной около:

- а) прямоугольного треугольника, биссектриса которого делит один из катетов на части 4 см и 5 см;
- б) равнобедренной трапеции, основания которой равны 60 см и 80 см, а боковая сторона — 26 см.

1387. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника, у которых наибольшие биссектрисы равны 5 см и 12 см. Найдите наибольшую биссектрису треугольника.

1388. Найдите стороны треугольника, учитывая, что:

- а) один из его углов прямой, биссектриса другого угла делит противоположающую сторону в отношении $3:5$, а периметр равен 72 см;
- б) его углы, прилежащие к одной стороне, равны 45° и 60° , а проведенная к ней высота — 12 см.

1389. Диагонали трапеции равны 15 см и 20 см, а средняя линия — $12,5$ см. Найдите высоту трапеции.

1390. Основания прямоугольной трапеции равны 17 см и 25 см, а большая боковая сторона — 10 см. Найдите отрезок, который соединяет точку продолжения меньшей боковой стороны с серединой большей и ей перпендикулярен.

1391. Найдите периметр прямоугольного треугольника, гипотенуза которого больше одного катета на 2 см, а другого — на 25 см.

1392. Биссектриса, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит ее в отношении $2 : 5$. Выясните, в каком отношении делит гипотенузу проведенная к ней высота.

1393. Высота, проведенная к боковой стороне равнобедренного треугольника, делит ее на части 3 см и 2 см, если считать от вершины. Найдите эту высоту и периметр треугольника.

1394. Высота равнобедренного треугольника разделена в отношении $2 : 3$, если считать от вершины. Через вершину основания и точку деления проведена прямая. Выясните, в каком отношении она делит боковую сторону.

1395. Сравните поверхность шара с полной поверхностью цилиндра, учитывая, что они имеют равные объемы и радиус шара равен радиусу основания цилиндра.

1396. Гипотенуза и катеты треугольника являются диаметрами трех шаров. Установите зависимость между их поверхностями.

1397. Радиус шара равен 18 см. Выясните, какую площадь имеет часть его поверхности, которая видна из точки, отстоящей от центра на 30 см.

1398. Четыре шара лежат на столе так, что каждый касается трех остальных и плоскости стола. Три шара имеют радиус, равный R . Найдите радиус четвертого шара.

1399. Плоскость, отстоящая на 3 см от центра шара, пересекает его по кругу с радиусом 4 см. Найдите объем шара.

1400. Найдите объем конуса, учитывая, что:

а) в него вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник, у которого меньшая сторона равна a и острый угол между диагоналями — α , а боковая грань, содержащая меньшую сторону основания, составляет с плоскостью основания угол β ;

б) он вписан в пирамиду, основанием которой является ромб со стороной a и острым углом φ , а образующая конуса составляет с плоскостью основания угол θ .

1401. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Выясните, как относится площадь полученного сечения к площади большого круга.

1402. Докажите, что если одна из граней вписанной в цилиндр треугольной призмы проходит через ось цилиндра, то две другие грани взаимно перпендикулярны.

1403. В конус высотой 24 см вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник со сторонами 12 см и 16 см. Найдите отношение полных поверхностей пирамиды и конуса.

1404. В усеченный конус вписана правильная усеченная n -угольная пирамида. Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 см и 5 см, а высота — 4 см. Найдите полную поверхность пирамиды, учитывая, что:

- а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

1405. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, вписанного в цилиндр:

а) с радиусом основания r , учитывая, что диагональ параллелепипеда составляет с основанием цилиндра угол α , а угол между диагоналями основания равен 60° ;

б) с высотой h , учитывая, что угол между диагоналями одной грани параллелепипеда, обращенный к боковому ребру, равен α , а угол между диагоналями параллелепипеда, обращенный к тому же ребру, — β .

1406. Есть цилиндр с радиусом основания r , осевым сечением которого является квадрат. В него вписана прямая треугольная призма, у которой два двугранных угла при боковых ребрах равны α каждый. Найдите объем призмы.

1407. Основанием прямого параллелепипеда является ромб с острым углом α . В него вписан цилиндр с радиусом r , диагональ осевого сечения которого составляет с основанием угол 60° . Найдите объем параллелепипеда.

1408. Найдите объем правильной треугольной призмы, описанной около шара с радиусом r .

1409. Радиус основания конуса равен r , а образующая составляет с основанием угол α . Найдите объем правильной треугольной пирамиды, вписанной в конус.

1410. Образующая конуса равна l и составляет с основанием угол α . В него вписана пирамида, основанием которой является прямоугольный треугольник с острым углом β . Найдите объем пирамиды.

1411. Форма для мороженого конической формы имеет глубину 12 см и диаметр большего основания — 5 см. В нее вложили две ложки мороженого в виде полушаров диаметром 5 см. Выясните, поместится ли мороженое в форме, когда оно растает.

1412. Шарообразный приемник газа имеет в диаметре 9,22 м. Выясните:

- какова его вместимость;
- до скольких атмосфер сжат газ в газоприемнике, учитывая, что в него закачено 2500 м^3 газа при нормальном давлении.

1413. Чтобы отлить свинцовый шар диаметром 3 см, используют свинцовые шарики диаметром 5 мм. Выясните, сколько таких шариков нужно взять.

1414. Выясните, сколько воды вмещает котел, размеры которого на рисунке 448 даны в сантиметрах.

1415. Железобетонная плита для перекрытия потолка размерами $180 \times 24 \times 580$ см имеет по длине 9 круглых сквозных отверстий диаметром 10 см. Найдите массу плиты, приняв плотность железобетона равной 2400 кг/м^3 .

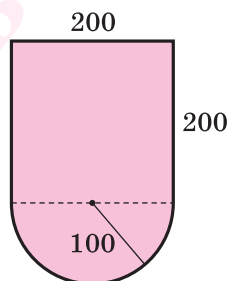


Рис. 448

1416. Цилиндр с радиусом основания r и высотой h рассечен плоскостью, параллельной оси. Найдите объем меньшей части цилиндра, учитывая, что дуга ее основания равна 120° .

1417. Две полуплоскости с общей границей касаются цилиндра и двугранный угол между ними, обращенный к цилиндру, равен 60° . Выясните, в каком отношении линии касания этих поверхностей разделили боковую поверхность цилиндра.

1418. Ось цилиндра с радиусом основания r и вдвое большей высотой является границей двух полуплоскостей, двугранный угол между которыми равен 36° . Найдите полную поверхность образовавшейся меньшей части цилиндра.

1419. Радиус шара равен 2 м, а радиус сечения шара плоскостью — 1 м. Найдите объем сектора, который соответствует сегменту, отсеченному плоскостью.

1420. Найдите площадь сечения шара плоскостью, которая:

- а) отстоит от центра на 10 см, а радиус шара равен 60 см;
- б) отстоит от центра на 19 дм, а радиус шара равен 82 см;
- в) проведена через середину радиуса длиной 28 см;
- г) проведена через конец радиуса длиной R под углом 60° к нему.

1421. Докажите, что сечения шара двумя плоскостями, проходящими через концы одного диаметра под равными углами к нему, равновелики.

1422. Найдите полную поверхность конуса, учитывая, что:

- а) он описан около шара с радиусом r , а угол между образующей и основанием конуса равен α ;
- б) его образующая составляет с плоскостью основания угол 45° , а высота равна 6 см;
- в) он получен свертыванием жестяного сектора с углом 270° и радиусом 7,1 см и закрыт жестяным кругом.

1423. Центральный угол развертки боковой поверхности конуса равен 90° . Найдите площадь его осевого сечения, учитывая, что радиус основания конуса равен 6 см.

1424. Найдите радиус шара, учитывая, что:

- а) площадь сечения шара плоскостью, которая перпендикулярна радиусу и проходит через его середину, равна 36π см²;
- б) общая хорда перпендикулярных сечений, проведенных на расстояниях 8 см и 12 см от центра, равна 18 см;
- в) он описан около правильной треугольной призмы, у которой высота равна H , а диагональ боковой грани наклонена к плоскости основания под углом α ;
- г) он вписан в правильную n -угольную пирамиду, у которой сторона основания равна a , а двугранный угол при основании — φ ;
- д) он описан около правильной n -угольной пирамиды, у которой сторона основания равна a , а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α ;
- е) он описан около пирамиды, у которой основанием является прямоугольник с диагональю 8 см, а каждое боковое ребро составляет с основанием угол 15° ;

ж) он описан около правильной четырехугольной пирамиды, каждое ребро которой равно 4 см.

1425. Найдите объем цилиндра, учитывая, что он вписан в:

- а) правильную четырехугольную призму, каждое ребро которой равно a ;
- б) правильную шестиугольную призму, каждое ребро которой равно a ;
- в) шар с радиусом R , а высота равна диаметру основания;
- г) шар с радиусом R , а диагональ его осевого сечения составляет с основанием угол α .

1426. Найдите боковую поверхность цилиндра, учитывая, что:

- а) площадь его осевого сечения равна S ;
- б) он вписан в шар с радиусом R , а диагональ осевого сечения составляет с основанием угол α .

1427. Найдите объем шара, учитывая, что:

- а) его диаметр равен D ;
- б) объем его части, заключенной между касательной плоскостью шара и плоскостью, параллельной ей и отстоящей на 3 см, равен $72\pi \text{ см}^3$;
- в) он описан около прямой призмы с объемом 24 см^3 , основанием которой является прямоугольный треугольник, а катеты основания и боковое ребро относятся как $1 : 2 : 3$.

1428. Выясните, как:

- а) изменится поверхность шара, если его радиус увеличить в 2 раза;
- б) относятся объемы шаров, если их поверхности относятся как $m : n$.

1429. Найдите массу гранитного шара диаметром 1,8 м, учитывая, что плотность гранита равна $2,6 \text{ кг/дм}^3$.

1430. Найдите радиус шара, учитывая, что его масса равна:

- а) 150 кг и он изготовлен из железа, плотность которого равна $7,9 \text{ г/см}^3$;
- б) 10 кг и он изготовлен из чугуна, плотность которого равна $7,2 \text{ г/см}^3$.

1431. Выясните:

- а) шар какого диаметра получится при переплавке двух чугуновых шаров с диаметрами 25 см и 35 см;
б) сколько шариков диаметром 1 см можно отлить из куска свинца массой 1 кг, учитывая, что плотность свинца равна $11,4 \text{ г/см}^3$.

1432. Найдите массу полого железного шара, учитывая, что плотность железа равна $7,9 \text{ г/см}^3$, а:

- а) внутренний и внешний диаметры соответственно равны 35 мм и 50 мм;
б) радиусы внутренней и внешней поверхностей равны 50 мм и 100 мм.

1433. Внешний диаметр полого шара равен 30 см, а толщина стенок — 5 см. Найдите объем материала, из которого изготовлен шар.

1434. Чугунный шар диаметром 10 см покрыт бронзовой оболочкой толщиной 3 мм. Найдите массу бронзы, израсходованной на покрытие шара, учитывая, что плотность бронзы равна $8,7 \text{ г/см}^3$.

1435. В шаре с радиусом 15 см вдоль диаметра просверлено цилиндрическое отверстие диаметром 18 см. Найдите полную поверхность полученного тела.

1436. Правильная четырехугольная пирамида, у которой сторона основания равна a , а плоский угол при вершине равен α , вращается вокруг прямой, проходящей через вершину и параллельной стороне основания. Найдите объем полученного тела вращения.

1437. Шар получен вращением полукруга вокруг прямой, содержащей диаметр. При этом поверхность, образованная при вращении некоторой хорды, один конец которой совпадает с концом данного диаметра, разделяет шар на части с равными объемами. Найдите косинус угла между этой хордой и диаметром.

1438. Площадь большого круга шара равна $50\pi \text{ см}^2$, а два взаимно перпендикулярных сечения шара имеют общую хорду длиной 6 см. Найдите расстояние от центра шара до сечения, учитывая, что площадь одного из них равна $25\pi \text{ см}^2$.

1439. Внутри шара с радиусом r взята точка, отстоящая от центра на d . Через его проведены три попарно перпендикулярные плоскости. Найдите сумму площадей трех полученных сечений.

1440. Четверть круга AOB с радиусом r вращается вокруг радиуса OB . Выясните, на каком расстоянии x от центра O нужно выбрать точку P и через нее провести прямую l , параллельную радиусу OA , чтобы кольцо, описанное отрезком CD , где C и D — точки пересечения прямой l с хордой AB и дугой AB соответственно (рис. 449), имело данную площадь πt , и найдите наибольшее значение этой площади при изменении x от 0 до r .

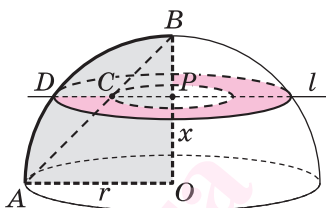


Рис. 449

1441. Газовый резервуар имеет форму цилиндра, который сверху закрыт шаровым сегментом. Радиус цилиндра равен 15,0 дм, высота цилиндрической части — 100 дм, а полная высота резервуара — 125 дм. Найдите его объем.

1442. Выясните, какую часть объема шара составляет объем шарового сегмента, высота которого равна десятой доле диаметра шара.

1443. Найдите объем части шара, которую отсекает от него плоскость, учитывая, что радиус окружности сечения равен:

- а) 24 см, а радиус шара — 30 см;
- б) 60 см, а радиус шара — 75 см.

1444. Найдите объем части шара с радиусом R , учитывая, что она заключена между:

- а) двумя плоскостями, которые перпендикулярны диаметру шара и разделяют диаметр на три доли;
- б) параллельными плоскостями α и β , из которых плоскость α пересекает шар по окружности с радиусом $r = 0,8R$, а плоскость β равноудалена от плоскости α и параллельной ей касательной плоскости шара.

1445. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара с радиусом 9 см, делит этот диаметр в отношении 1 : 2. Найдите объем меньшего шарового сегмента.

1446. Цистерна имеет форму цилиндра, к основаниям которого приставлены равные сферические сегменты. Радиус цилиндра равен 1,5 м, а высота сегмента — 0,5 м. Выясните, какой длины должна быть образующая цилиндра, чтобы вместимость цистерны была равной 50 м^3 .

1447. Найдите объем шарового сектора, учитывая, что:

- а) его радиус равен r , а угол его осевого сечения — 120° ;
- б) радиус окружности основания соответствующего сегмента равен 60 см, а радиус шара — 75 см;
- в) радиус окружности основания соответствующего сегмента равен 100 см, а радиус шара — 125 см.

1448. Шаровой сектор образован вращением кругового сектора около своей оси симметрии. Докажите, что если площадь его осевого сечения равна третьей доле площади большого круга, то объем его равен четвертой доле объема шара.

1449. Докажите, что центр шара, описанного около:

- а) правильной призмы, лежит на середине отрезка, соединяющего центры оснований этой призмы;
- б) правильной пирамиды, лежит на прямой, содержащей высоту пирамиды.

1450. Поверхность шара равна $100\pi \text{ см}^2$. Найдите объемы сегментов, на которые плоскость, перпендикулярная диаметру, делит шар, учитывая, что площадь сечения шара этой плоскостью равна $16\pi \text{ см}^2$.

1451. Найдите поверхность шара, учитывая, что:

- а) он вписан в цилиндр с боковой поверхностью $36\pi \text{ см}^2$;
- б) в него вписана прямая призма, основанием которой является равнобедренный прямоугольный треугольник, высота призмы равна 12 см, а длина диагонали меньшей грани — 13 см;
- в) он описан около прямой призмы, основанием которой является равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами 3 см, а площадь сечения, проведенного через один из катетов основания и противоположащую вершину другого основания, равна $7,5 \text{ см}^2$;
- г) он касается поверхности данного шара с радиусом r , боковой поверхности цилиндра, описанного около данного шара и одного основания цилиндра;

- д) осевое сечение цилиндра, вписанного в шар, является квадратом, а боковая поверхность цилиндра равна 16π см²;
- е) он вписан в правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания 4 см и боковой гранью, наклоненной к плоскости основания под углом α ;
- ж) он вписан в правильную четырехугольную пирамиду, высота которой вдвое больше радиуса шара, а сторона основания равна a ;
- з) он описан около правильной пирамиды, боковое ребро которой равно b и составляет с основанием пирамиды угол α ;
- и) он вписан в конус, образующая которого равна l и составляет с плоскостью основания угол 60° .

1452. В цилиндр, диаметр d которого равен высоте, вписан шар. Найдите поверхность шара и полную поверхность цилиндра.

1453. Найдите поверхность шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, у которой:

- а) сторона основания равна 2 см, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° ;
- б) сторона основания равна a , а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 30° ;
- в) боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° , а радиус окружности, описанной около основания, равен 6 см;
- г) ребро равно a и составляет с плоскостью основания угол α .

1454. Найдите диаметр шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, у которой:

- а) сторона основания равна 4 см, а боковое ребро — 6 см;
- б) высота равна 28 см, а боковое ребро — 35 см;
- в) все ребра равны a .

1455. Найдите радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, у которой:

- а) боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° , а радиус окружности, описанной около основания, — 4 см;
- б) сторона основания равна a и высота — h ;
- в) боковые ребра составляют с плоскостью основания угол 60° , а сторона основания равна a ;
- г) плоский угол при вершине равен α , а сторона основания — a .

1456. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 4 см. Найдите площадь сечения призмы, проведенного через второй катет и противоположащую вершину второго основания, учитывая, что боковое ребро призмы равно 3 см, а площадь описанного около нее шара — 61π см².

1457. Найдите объем призмы, вписанной в шар с радиусом:

- а) 9 см, учитывая, что она четырехугольная и ее высота равна 14 см;
- б) R , учитывая, что она треугольная и ее высота равна H ;
- в) R , учитывая, что она четырехугольная и диагональ боковой грани наклонена к плоскости основания под углом α .

1458. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, вписанного в шар с радиусом R , учитывая, что диагональ параллелепипеда составляет с одной гранью угол α , а:

- а) с другой — угол 60° ;
- б) угол между диагональю этой грани и стороной основания равен 60° .

1459. Около шара с радиусом r описана правильная треугольная призма. Найдите ее:

- а) боковую поверхность;
- б) полную поверхность.

1460. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно 2 м, а сторона основания — 3 м. Найдите:

- а) диаметр описанного шара;
- б) угол, под которым видно из центра боковое ребро.

1461. Найдите отношение:

- а) полной поверхности цилиндра, вписанного в шар, к поверхности шара, учитывая, что высота цилиндра равна диаметру его основания;
- б) полной поверхности цилиндра к поверхности вписанного в него шара;
- в) объемов шара и вписанного в него конуса, основанием которого служит большой круг, а вершина принадлежит поверхности шара;
- г) объемов усеченного конуса с радиусами оснований r и r_1 и вписанного в него шара.

1462. Докажите, что на прямой, содержащей высоту правильной пирамиды, лежит центр:

- а) описанного около нее шара; б) вписанного в нее шара.

1463. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, учитывая, что она:

- а) описана около шара с радиусом 3 см, а диагональ ее основания — $14\sqrt{2}$ см;
б) описана около шара с радиусом r , двугранный угол при ее основании равен α ;
в) вписана в шар с радиусом 4 см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 30° .

1464. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, учитывая, что она:

- а) описана около шара с объемом V , а двугранный угол при основании пирамиды равен α ;
б) вписана в шар с радиусом R , а плоский угол при вершине равен α ;
в) вписана в шар с радиусом R , а боковое ребро пирамиды составляет с основанием угол α ;
г) вписана в шар с радиусом r , а боковая грань наклонена к основанию под углом α ;
д) описана около шара с радиусом r , а высота пирамиды равна H .

1465. Правильная n -угольная призма вписана в шар с радиусом R . Ребро основания призмы равно a . Найдите высоту призмы, учитывая, что:

- а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

1466. Около правильной четырехугольной пирамиды описан шар. Найдите радиус этого шара, учитывая, что сторона основания равна:

- а) 6 см, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60° ;
б) $2a$, а боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60° .

1467. Найдите радиус шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, учитывая, что:

- а) сторона ее основания равна a и плоский угол при вершине — α ;

- б) ее высота равна стороне основания, а объем равен 9 см^3 ;
- в) ее боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 30° , а середина апофемы пирамиды отстоит от плоскости основания на 2 см ;
- г) ее боковое ребро равно 2 см и наклонено к плоскости основания под углом 60° ;
- д) ее высота равна 12 см , а боковое ребро — 15 см .

1468. Найдите радиус шара, учитывая, что:

- а) в него вписана правильная треугольная пирамида, сторона основания которой равна a , а высота равна стороне основания;
- б) он вписан в пирамиду, основанием которой является ромб со стороной a и углом α , а каждая боковая грань пирамиды наклонена к плоскости основания под углом β ;
- в) в него вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник с диагональю 10 , а ее боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом δ ;
- г) он вписан в треугольную пирамиду, боковые ребра которой взаимно перпендикулярны и равны a ;
- д) в него вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник с диагональю $2a$, а каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом β ;
- е) он вписан в правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания a и высотой h .

1469. Найдите боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, учитывая, что:

- а) ее высота равна 8 см , а сама она описана около шара, центр которого отстоит от боковой грани пирамиды на 3 см ;
- б) радиус вписанной в нее сферы равен 8 см , а боковая грань пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 60° ;
- в) она описана около шара с радиусом R , а плоский угол при ее вершине равен α ;
- г) она усеченная, описана около шара с радиусом r , а двугранный угол при ее основании равен α .

1470. Найдите радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, боковые грани которой наклонены к плоскости основания под углом 60° , а сторона основания равна:

- а) 12 см ;
- б) 18 см ;
- в) l .

1471. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , а боковое ребро — $2a$. Найдите радиусы вписанного и описанного шаров.

1472. Радиусы шаров, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду и описанного около нее, равны 4 см и 10 см. Найдите сторону основания и высоту пирамиды.

1473. Найдите радиус шара, описанного около правильной пирамиды, у которой боковое ребро равно:

- а) b и составляет с основанием угол α ;
- б) l , а высота — h .

1474. В шар с радиусом r вписана правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой составляет с основанием пирамиды угол α . Найдите это ребро.

1475. Найдите радиус шара, вписанного в правильную пирамиду, высота которой равна h , а двугранный угол при основании равен:

- а) 60° ;
- б) α .

1476. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , а угол между противоположными боковыми гранями — α . Найдите радиус вписанного шара.

1477. Высота правильной пирамиды равна h , а радиус описанной около основания окружности — r . Определите:

- а) радиус описанного шара;
- б) при каком соотношении между h и r центр шара лежит внутри пирамиды, на ее основании, вне пирамиды.

1478. Радиус шара, вписанного в правильную пирамиду, равен r , а двугранный угол при основании — α . Найдите полную поверхность пирамиды, учитывая, что она является:

- а) четырехугольной;
- б) треугольной.

1479. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 3 см, а боковое ребро — 2 см. Выясните, как по отношению к пирамиде расположен центр описанного около нее шара.

1480. Учитывая, что шар вписан в правильную:

- а) треугольную пирамиду со стороной основания a и двугранным углом при ней — α , найдите объем шара;

б) четырехугольную пирамиду, расстояние вершины которой до центра шара равно a , а угол наклона боковой грани к плоскости основания — α , найдите полную поверхность пирамиды.

1481. Найдите объем шара, учитывая, что он:

а) описан около правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 30 см, а боковое ребро — 24 см;

б) вписан в правильную треугольную пирамиду, сторона основания которой равна a , а двугранный угол при основании — α .

1482. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна a , а угол при основании треугольника — α . Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом φ . Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.

1483. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, учитывая, что:

а) радиус шара, вписанного в нее, равен 10 см, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° ;

б) ее высота равна H , а радиус описанного около нее шара — R .

1484. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды, учитывая, что:

а) радиус шара, вписанного в нее, равен 10 см, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° ;

б) ее высота равна H , а радиус описанного около нее шара — R .

1485. Найдите объем конуса, в который вписан шар с радиусом r , учитывая, что:

а) образующая конуса равна диаметру его основания;

б) это конус наименьшего объема;

в) угол наклона образующей к плоскости основания равен α .

1486. Полушар и вписанный в него конус имеют общее основание и общую высоту. Через середину высоты проведена плоскость, параллельная основанию. Докажите, что площадь сечения, заключенного между боковой поверхностью конуса и поверхностью полушара, равна половине площади основания.

1487. Через точку высоты полушара проведена перпендикулярная ей плоскость, и в полученные шаровые сегмент и слой вписаны такие конус и цилиндр соответственно, что

сечение полушара является их общим основанием. Найдите такое положение сечения, при котором боковые поверхности конуса и цилиндра равны.

1488. Найдите объем конуса, учитывая, что радиус его основания равен 18 дм, а радиус вписанного в конус шара равен 9 дм.

1489. Найдите площадь осевого сечения конуса с объемом 48 см^3 и длиной окружности основания 9 см.

1490. Есть правильная четырехугольная пирамида со стороной основания 2. Угол при вершине между ребрами одной грани равен α . Через центр основания проведена плоскость, параллельная боковой грани. Найдите периметр и площадь полученного сечения.

1491. Найдите значение выражения:

а) $2008 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 - 7^2 + \dots + 98^2 - 99^2$;

б) $\frac{8^{\frac{2}{3}} - (0,1)^{-1,5}}{(\sqrt[4]{0,25} - 1) \cdot (\sqrt[4]{0,25} + 1)}$;

в) $25^{\log_9 3} + \log_4^{-2} \left(\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{49} \right)$.

1492. Найдите 30 % числа

$$\left(0,8 - \frac{6}{19} \cdot (4,22 - 28,07 : 3,5) \right)^2 + 184 \cdot 0,25.$$

1493. Найдите значение выражения:

а) $\frac{(x-y)^3 - x^3 + y^3}{x^3 - x^2 y}$, учитывая, что $x = 0,11$ и $y = 5,5$;

б) $\frac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha + 1}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1}$, учитывая, что $\operatorname{tg} \alpha = 0,3$;

в) $\frac{a+3}{95-a}$, учитывая, что a — корень уравнения

$$3\sqrt{x} - 15 = 4 \cdot \sqrt[4]{x}.$$

1494. Расположите по возрастанию числа $x = 0,5^{-\sqrt{8}}$, $y = \log_2 256$ и $z = 2^\pi$.

1495. Упростите выражение $\frac{\log_a x \cdot \log_b x}{\log_a x + \log_b x}$.

1496. Найдите сумму:

а) $x_0 + y_0$, учитывая, что $(x_0; y_0)$ — решение системы

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18; \end{cases}$$

б) $x_0^2 + y_0^2$, учитывая, что $(x_0; y_0)$ — решение системы

$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 1,5, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$$

в) целых решений системы неравенств $\begin{cases} |x| \geq 4, \\ |1 - x| < 6. \end{cases}$

1497. Найдите значения переменных a , при которых:

а) сумма кубов корней уравнения $x^2 - 6x + a = 0$ равна 162;

б) один корень уравнения $a^2x^2 - 5x - 21 = 0$ меньше 3, а другой — больше 3.

1498. Один рабочий может выполнить заказ за 4 ч, а другой — за 6 ч. Определите, за какое время они выполнят заказ, если будут работать вместе.

1499. Найдите радиус круга, вписанного в сектор AQB , учитывая, что $QA = 6$ см и $AB = 3$ см.

1500. Найдите:

а) корень уравнения $3^{x-2} - 2^{x+1} = 2^{x-1} - 77 \cdot 3^{x-7}$;

б) сумму целых решений неравенства $3^{1-x} - \log_3(3x - 1) + \log_3(7 - x) < 2$;

в) количество корней уравнения $\sin 6x - \cos^2 x = \sqrt{3} \cos 6x + 2$ на промежутке $[0; 10\pi]$;

г) количество целых значений в области определения функции $y = \sqrt{(9 - x^2)^4} \sqrt{3x - 6}$.

1501. Касательная к графику функции $y = x^2 - x - 2$ наклонена к оси абсцисс под углом 60° . Найдите удвоенную ординату точки касания.

1502. Найдите длину промежутка, на котором убывает функция $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

1503. Найдите сумму координат вершины равнобедренного прямоугольного треугольника, гипотенуза которого соединяет точки $(1; 3)$ и $(3; 5)$.

1504. Диагональ AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ делит пополам диагональ BD . Сравните углы ACB и ACD , учитывая, что $AB > AD$.

1505. Решите уравнение $x = (\sqrt{x} + 2)(1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}})^2$.

1506. Докажите, что при любом натуральном значении переменной n целые части чисел $\sqrt{n} + \sqrt{n+3}$ и $\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$ равны.

25. Геометрические построения

Построения линейкой и циркулем

В геометрии важную роль играют построения с использованием только двух инструментов — линейки и циркуля.

Геометрическая линейка односторонняя и не имеет делений (рис. 450). С ее помощью можно провести:

- прямую через две данные точки;
- луч, который начинается в данной точке и проходит через другую данную точку;
- отрезок, соединяющий две данные точки;
- произвольную прямую;
- произвольный луч;
- произвольный отрезок.

С помощью *циркуля* (рис. 451) можно:

- отметить две точки R и S , расстояние между которыми равно данному отрезку AB ;
- построить окружность с центром в выбранной точке и радиусом, равным данному отрезку;
- построить произвольную окружность.



Рис. 450

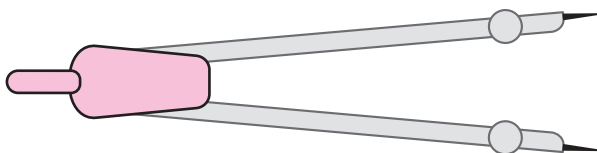


Рис. 451

Это *элементарные построения*, которые можно выполнить линейкой и циркулем. Их сочетание позволяет проводить более сложные построения.

Решить задачу на построение означает свести ее к последовательному выполнению элементарных построений, которые можно выполнить циркулем и геометрической линейкой. Вместе с этим сведение решения каждой задачи к элементарным построениям нерационально. Обычно построение нужной фигуры сводят к так называемым *основным построениям*:

- построение отрезка, равного данному отрезку;
- построение угла, равного данному углу;
- построение треугольника, равного данному треугольнику;
- построение треугольника, стороны которого равны трем данным отрезкам;
- построение треугольника, сторона которого равна данному отрезку, а прилежащие к ней углы — двум данным углам;
- построение треугольника, угол которого равен данному углу, а прилежащие к нему стороны — двум данным отрезкам;
- построение середины данного отрезка;
- построение биссектрисы данного угла;
- построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной прямой;
- построение прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой;
- построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и острому углу;
- построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету;
- построение прямой, проходящей через данную точку и касающейся данной окружности;
- деление данного отрезка на n отрезков-долей;
- деление данного отрезка в данном отношении $\frac{m}{n}$;
- построение отрезка, четвертого пропорционального трем данным отрезкам.

Множество всех точек, имеющих определенное свойство, называют *геометрическим местом точек*.

Геометрическим местом точек, которые:

- равноудалены от сторон угла, является биссектриса этого угла (рис. 452);
- равноудалены от данной точки, является окружность (рис. 453);
- равноудалены от двух данных точек, является серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему эти точки (рис. 454);
- равноудалены от двух данных параллельных прямых, является серединный перпендикуляр к перпендикуляру, опущенному из какой-либо точки одной прямой на другую прямую (рис. 455);
- равноудалены от двух данных пересекающихся прямых, является пара прямых, образованных биссектрисами углов, на которые данные прямые разделяют плоскость (рис. 456).

Геометрическим местом точек, из которых:

- данный отрезок виден под прямым углом, является окружность, для которой данный отрезок служит диаметром (рис. 457);

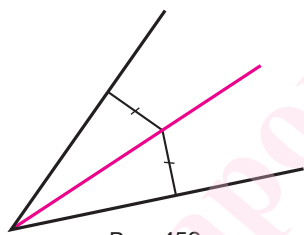


Рис. 452

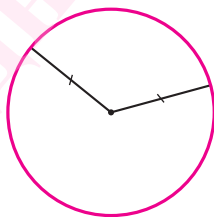


Рис. 453

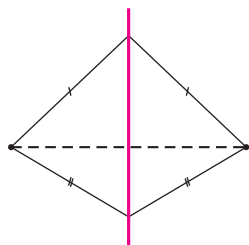


Рис. 454

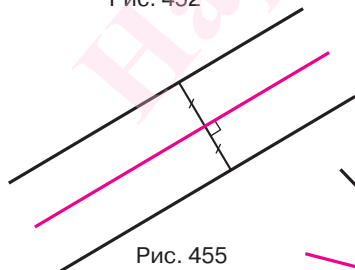


Рис. 455

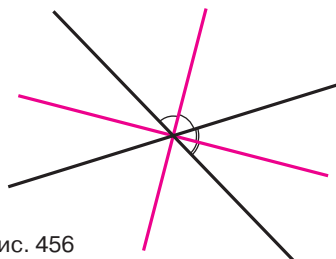


Рис. 456

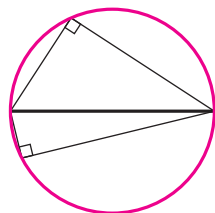


Рис. 457

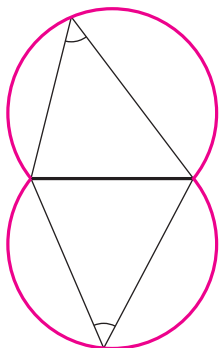


Рис. 458

• данный отрезок виден под данным углом, отличным от развернутого, является пара дуг, для которых данный отрезок служит общей хордой (рис. 458).

Функцию, областью определения которой является множество всех точек плоскости (пространства), и каждая точка получается точно из одной точки, называют *преобразованием плоскости (пространства)*.

Если точка M при преобразовании переходит в точку M' , то точку M' называют *образом точки M* , а точку M — *прообразом точки M'* .

Если точки X' и Y' — образы точек X и Y при некотором преобразовании плоскости или пространства и всегда $X'Y' = XY$, то говорят, что это преобразование *сохраняет расстояния* между точками. Преобразование, сохраняющее расстояния между точками, называется *движением*.

Преобразование движения имеет такие свойства:

- три точки одной прямой отображаются в три точки также одной прямой, а три точки, не лежащие на одной прямой, — в три точки, которые также не лежат на одной прямой;
- отрезок отображается в отрезок, луч — в луч, прямая — в прямую, треугольник — в треугольник, плоскость — в плоскость;
- сохраняются величины углов, площади многоугольников.

На плоскости рассматриваются следующие *виды движений* — осевую симметрию, центральную симметрию, параллельный перенос, поворот.

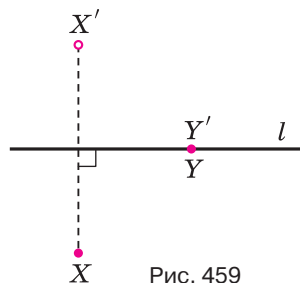


Рис. 459

Точки X и X' называются *симметричными относительно прямой l* , если прямая l является серединным перпендикуляром к отрезку XX' (рис. 459). Каждая точка прямой l считается симметричной самой себе. Прямая l называется *осью симметрии*.

Преобразование плоскости, при котором каждая точка плоскости отобра-

жается в точку, симметричную относительно данной прямой l , называется *осевой симметрией с осью l* . Осевая симметрия с осью l обозначается S_l .

Если фигура Φ' получена из фигуры Φ с помощью осевой симметрии с осью l , то фигуры Φ и Φ' называются *симметричными относительно оси l* (рис. 460). Фигура относительно некоторой прямой l может быть симметричной самой себе (рис. 461). Тогда прямую l называют *осью симметрии фигуры*.

Точки X и X' называются *симметричными относительно точки O* , если точка O является серединой отрезка XX' (рис. 462). Точка O считается симметричной самой себе, ее называют *центром симметрии*.

Преобразование плоскости, при котором каждая точка плоскости отображается в точку, симметричную относительно данной точки O , называется *центральной симметрией с центром O* . Центральная симметрия с центром O обозначается Z_O .

Если фигура Φ' получена из фигуры Φ с помощью центральной симметрии с центром O , то фигуры Φ и Φ' называются *симметричными относительно центра O* (рис. 463). Фигура относительно некоторой точки O может быть симметричной самой себе (рис. 464). Тогда точку O называют *центром симметрии фигуры*.

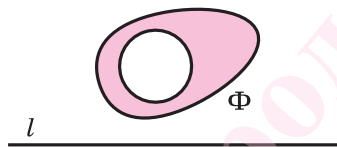


Рис. 460

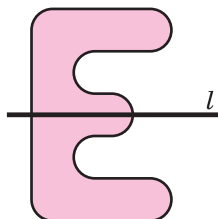


Рис. 461

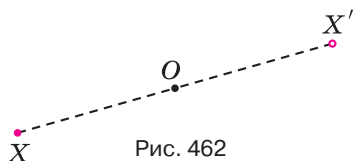


Рис. 462

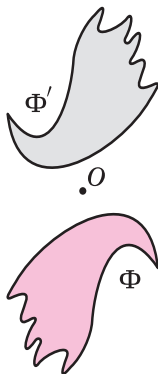


Рис. 463

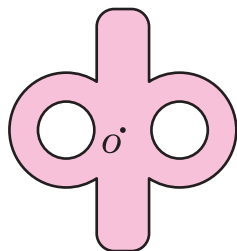


Рис. 464

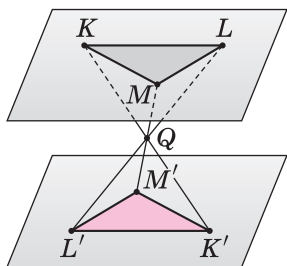


Рис. 465

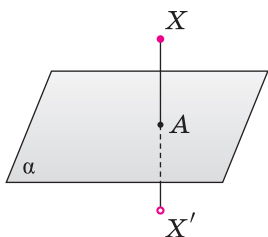


Рис. 467

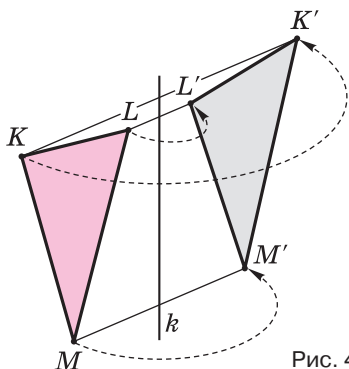


Рис. 466

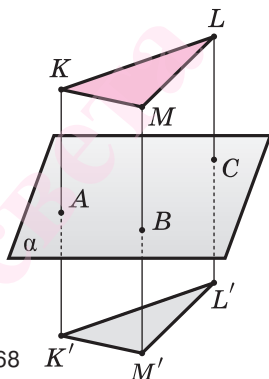


Рис. 468

В пространстве также рассматривают центральную симметрию (рис. 465) и осевую симметрию (рис. 466), которые определяются так же, как и на плоскости. Кроме этого, рассматривается еще симметрия относительно плоскости. Пусть α — данная плоскость (рис. 467) и X — произвольная точка пространства. Из точки X опустим перпендикуляр XA на плоскость α и на его продолжении за точку A отложим отрезок AX' , равный отрезку AX . Точка X' называется *точкой, симметричной точке X относительно плоскости α* .

Симметрией относительно плоскости α называется преобразование пространства, при котором каждая точка пространства отображается в точку, симметричную ей относительно плоскости α .

На рисунке 468 показано построение фигуры, симметричной данному треугольнику KLM относительно плоскости α .

Преобразование плоскости, при котором все точки плоскости смещаются в заданном направлении на заданное расстояние, называется *параллельным переносом* (рис. 469).

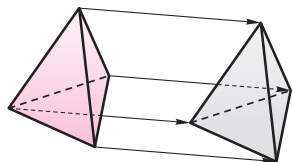


Рис. 469

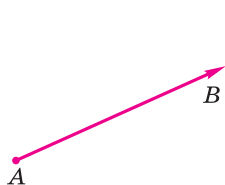


Рис. 470

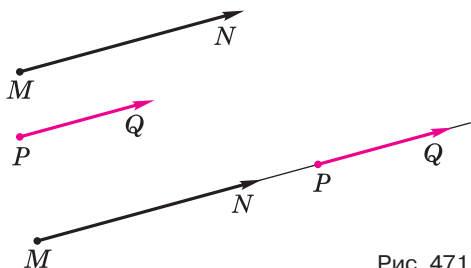


Рис. 471

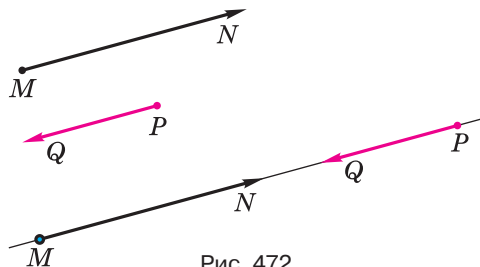


Рис. 472

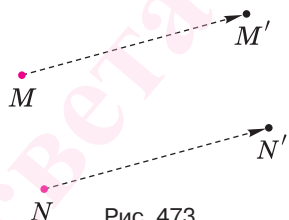


Рис. 473

Отрезок AB называют *направленным*, если его точку A считают началом, а точку B концом. Направленный отрезок отмечают стрелкой, идущей от его начала к его концу. Направленный отрезок AB на рисунке 470 обозначают $\overrightarrow{AB}$.

Направленные отрезки $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$ называют *сонаправленными*, если они параллельны или лежат на одной прямой и направлены в одну сторону (рис. 471).

Направленные отрезки $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$ называют *противоположно направленными*, если они параллельны или лежат на одной прямой и направлены в разные стороны (рис. 472).

Параллельный перенос точкам M и N плоскости ставит в соответствие такие точки M' и N' , что направленные отрезки $\overrightarrow{MM'}$ и $\overrightarrow{NN'}$ сонаправлены и имеют равные длины (рис. 473).

Параллельный перенос пространства определяется так же, как и параллельный перенос плоскости.

Параллельный перенос на отрезок $\overrightarrow{AB}$ обозначается $T_{\overrightarrow{AB}}$.

Поворотом вокруг точки O на данный угол α в заданном направлении называется такое преобразование плоскости, при котором каждая точка X плоскости отображается в такую точку X' , что $OX' = OX$, $\angle X'OX = \alpha$, и луч OX' откладывается от луча OX в заданном направлении, при этом точ-

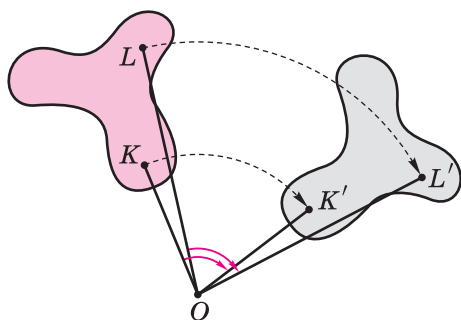


Рис. 474

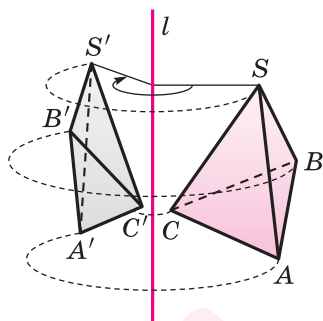


Рис. 475

ка O отображается сама в себя (рис. 474). Точка O называется *центром поворота*, а угол α — *углом поворота*.

Поворот вокруг центра O на угол α обозначается R_O^α .

В пространстве рассматривается поворот вокруг прямой. *Поворотом пространства вокруг прямой l на угол α в заданном направлении* называется такое преобразование пространства, при котором в каждой плоскости, перпендикулярной прямой l , происходит поворот вокруг точки ее пересечения с прямой l на угол α в заданном направлении (рис. 475). Прямая l называется *осью поворота*, а угол α — *углом поворота*.

Последовательное выполнение двух преобразований называется *композицией преобразований*. Любое движение плоскости является композицией самое большее трех осевых симметрий.

Преобразование плоскости (пространства), при котором две произвольные ее точки X и Y отображаются в такие две точки X' и Y' , что $X'Y' = k \cdot XY$, где k — положительное действительное число, называется *преобразованием подобия с коэффициентом k* .

Если существует преобразование подобия с коэффициентом k , отображающее фигуру Φ на фигуру Φ' , то говорят, что *фигура Φ' подобна фигуре Φ с коэффициентом k* .

Подобные фигуры имеют одну и ту же форму, но могут отличаться размерами.

Если $k = 1$, то фигуры являются одинаковыми не только по форме, но и по размерам. Это означает, что *движение является преобразованием подобия с коэффициентом 1*.

Простейшим примером преобразования подобия, не являющегося движением, является гомотетия.

Гомотетией с центром O и коэффициентом k , $k \neq 0$, называется преобразование плоскости, при котором каждая точка X отображается в такую точку X' , что $\overline{OX'} = k \cdot \overline{OX}$.

Гомотетия с центром O и коэффициентом k обозначается H_O^k .

На рисунке 476 показано построение треугольника $A'B'C'$, гомотетичного треугольнику ABC с коэффициентом 2, а на рисунке 477 — построение четырехугольника $P'Q'R'S'$, гомотетичного четырехугольнику $PQRS$ с коэффициентом $-\frac{1}{3}$.

Если $k = -1$, то гомотетия является центральной симметрией (рис. 478). Если $k = 1$, то гомотетия является тождественным преобразованием.

Любое преобразование подобия с коэффициентом k можно представить композицией гомотетии с коэффициентом k и произвольным центром и движением.

Гомотетия с коэффициентом k имеет такие свойства:

- отрезок AB преобразуется в такой параллельный отрезок $A'B'$, что $AB' = k \cdot AB$;
- треугольник отображается на подобный ему с коэффициентом k треугольник;
- угол отображается на равный ему угол;

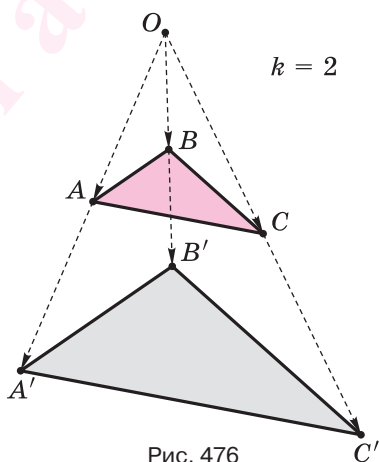


Рис. 476

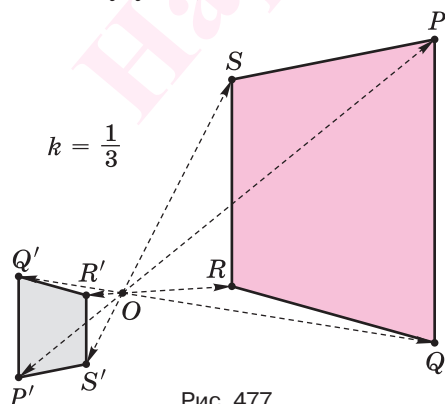


Рис. 477

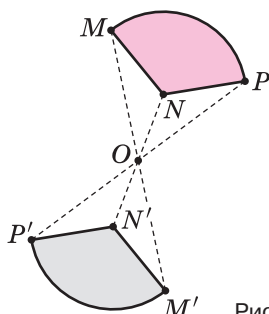


Рис. 478

• композиция гомотетий с общим центром и коэффициентами k_1 и k_2 есть гомотетия с тем же центром и коэффициентом $k_1 \cdot k_2$.

Преобразования подобия имеют такие свойства:

- отрезок отображается на отрезок, треугольник — на подобный ему треугольник, угол — на равный ему угол;
- композиция преобразований подобия с коэффициентами k_1 и k_2 есть преобразование подобия с коэффициентом $k_1 \cdot k_2$.

- ?
1. Какие построения можно выполнить геометрической линейкой; циркулем?
 2. Что означает требование *решить задачу на построение*?
 3. Как построить отрезок, равный данному; угол, равный данному; треугольник, равный данному?
 4. Как построить треугольник по трем его сторонам; треугольник по стороне и прилежащим углам; треугольник по углу и прилежащим сторонам?
 5. Как построить середину отрезка; биссектрису угла?
 6. Как построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой; прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой?
 7. Как построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу; прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету?
 8. Как построить прямую, проходящую через данную точку и касающуюся данной окружности?
 9. Как разделить отрезок на n отрезков-долей; отрезок в отношении $\frac{m}{n}$; отрезок, четвертый пропорциональный трем данным отрезкам?
 10. Какая фигура является геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла; от данной точки; от двух данных точек?
 11. Какая фигура является геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных параллельных прямых; от двух данных пересекающихся прямых?
 12. Какая фигура является геометрическим местом точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом; данный отрезок виден под данным углом, отличным от развернутого?

1507. Докажите, что:

- а) если $ABCD$ — прямоугольник, то для любой точки X плоскости истинно равенство $AX^2 + CX^2 = BX^2 + DX^2$;
- б) если для четырех данных точек A, B, C, D плоскости и произвольной ее точки X истинно равенство $AX^2 + CX^2 = BX^2 + DX^2$, то $ABCD$ — прямоугольник.

1508. Есть прямоугольный треугольник KLM , катеты которого MK и ML соответственно равны 1 и 3. Найдите геометрическое место таких точек Z этой плоскости, что $PK^2 + QL^2 = 2QM^2$.

1509. Напишите уравнение линии, по которой движется точка M , если известно, что $MC = 2MF$ и:

- а) $C(0; 0)$ и $F(6; 0)$;
- б) $C(-3; 0)$ и $F(1; 0)$;
- в) $C(1; -2)$ и $F(-2; 1)$;
- г) $C(-5; -2)$ и $F(3; 4)$.

1510. Найдите геометрическое место:

- а) вершин C треугольников, имеющих общее основание AB , у которых сторона AC равна данному отрезку;
- б) середин хорд данной окружности, равных данному отрезку;
- в) вершин равнобедренных треугольников с общим данным основанием;
- г) середин отрезков, концы которых принадлежат двум взаимно перпендикулярным прямым;
- д) точек, касательные из которых к данной окружности имеют данную длину.

1511. Найдите геометрическое место центров окружностей, которые:

- а) проходят через две данные точки;
- б) касаются данной прямой в данной ее точке;
- в) имеют данный радиус и касаются данной окружности;
- г) имеют данный радиус и проходят через данную точку;
- д) имеют данный радиус и делят данную окружность пополам;
- е) имеют данный радиус и общую хорду данной длины с данной окружностью;
- ж) имеют данный радиус и высекают на данной прямой хорды данной длины;
- з) высекают на двух данных прямых хорды, равные данному отрезку;
- и) имеют радиус данной длины и касаются данной прямой.

1512. Дана окружность с центром O и диаметром AB . На каждом радиусе OC откладывается отрезок OM , равный проекции этого радиуса на диаметр AB . Найдите геометрическое место точек M .

1513. Найдите точку, принадлежащую:

- а) данной прямой и равноудаленную от двух данных прямых;
- б) стороне треугольника и равноудаленную от двух других его сторон.

1514. Найдите геометрическое место точек, оканчивающихся на данной прямой и имеющих данную середину.

1515. Найдите геометрическое место вершин треугольников, которые имеют данное основание и данную площадь.

1516. Найдите геометрическое место:

- а) точек, сумма расстояний которых до двух данных параллельных прямых равна данному отрезку;
- б) точек, разность расстояний которых до двух данных параллельных прямых равна данному отрезку;
- в) концов отрезков, выходящих из данной точки и делящихся данной прямой пополам;
- г) середин отрезков, соединяющих данную точку с данной прямой;
- д) середин хорд, которые высекаются данной окружностью на прямых, проходящих через данную точку;
- е) точек, являющихся основаниями перпендикуляров, проходящих через данную точку, к прямой, проходящей через другую данную точку;
- ж) точек, в которых пересекаются прямые, проходящие через две данные точки и пересекающиеся под данным углом;
- з) концов отрезков, которые начинаются на данной окружности, параллельны и равны данному отрезку.

1517. Разделите прямой угол на три доли.

1518. Постройте равнобедренный треугольник по его:

- а) высоте, проведенной к основанию, и углу при вершине;
- б) основанию и высоте, проведенной к боковой стороне.

1519. Постройте треугольник по его:

- а) двум сторонам и высоте, проведенной к одной из них;
- б) двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне;
- в) стороне и проведенным из вершин этой стороны высоте и биссектрисе;
- г) стороне, прилежащему к ней углу и разности двух других сторон;
- д) стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон;
- е) стороне, медиане и высоте, проведенным к другой стороне;
- ж) двум медианам и углу между ними;

- з) трем медианам;
- и) двум медианам и высоте, проведенным к разным сторонам;
- к) стороне и двум медианам, проведенным к другим сторонам;
- л) стороне, проведенной к ней высоте и противолежащему углу;
- м) стороне, противолежащему углу и сумме (разности) двух других сторон.

1520. Постройте прямоугольный треугольник по его:

- а) гипотенузе и сумме катетов;
- б) гипотенузе и разности катетов;
- в) острому углу и сумме катетов;
- г) острому углу и разности катетов;
- д) катету и разности гипотенузы и другого катета;
- е) острому углу и сумме прилежащего катета и гипотенузы;
- ж) острому углу и периметру.

1521. Постройте треугольник по его:

- а) острому углу, прилежащей к нему стороне и сумме двух других сторон;
- б) углу, прилежащей к нему стороне и разности двух других сторон;
- в) двум углам и сумме противолежащих сторон;
- г) двум углам и разности противолежащих сторон;
- д) двум углам и периметру;
- е) высоте, медиане и биссектрисе, проведенным из одной вершины.

1522. Постройте окружность данного радиуса, которая:

- а) проходит через две данные точки;
- б) проходит через данную точку и касается данной окружности;
- в) проходит через данную точку и отсекает на данных пересекающихся прямых равные отрезки;
- г) касается данной окружности и отсекает на данных пересекающихся прямых равные отрезки;
- д) касается двух данных окружностей.

1523. Постройте окружность, которая:

- а) касается трех данных равных окружностей;
- б) касается трех данных прямых;

- в) касается двух данных прямых и проходит через данную точку;
- г) касается двух данных параллельных прямых и данной окружности;
- д) касается двух данных параллельных прямых и третьей прямой, пересекающей первые две;
- е) описана около данной равнобедренной трапеции.

1524. Есть окружность. Постройте:

- а) хорду, имеющую данную длину и проходящую через данную точку;
- б) проходящую через данную точку вне круга секущую, из которой высекается хорда данной длины;
- в) такую точку данной прямой, что расстояния от нее до точек касания проведенных из нее касательных равны данному отрезку.

1525. Постройте прямую, проходящую через данную:

- а) внутри угла точку и отсекающую на сторонах угла равные отрезки;
- б) точку, а две данные параллельные прямые высекают из нее отрезок, равный данному отрезку;
- в) точку и равноудаленную от двух данных точек.

1526. Постройте прямую, которая:

- а) образует с одной стороной данного угла угол данной величины, а сам угол высекает из прямой отрезок данной длины;
- б) параллельна основанию данного треугольника, а ее отрезок внутри треугольника равен сумме отрезков боковых сторон, заключенных между прямой и основанием;
- в) параллельна основанию треугольника, чтобы ограниченный ею отрезок на одной стороне до вершины был равен ограниченному ей отрезку на другой стороне до основания;
- г) проходит через данную точку, а расстояние между перпендикулярами, опущенными на эту прямую из двух данных точек, равно длине данного отрезка;
- д) проходит через точку пересечения двух данных окружностей, причем они высекают на прямой равные хорды.

1527. Постройте треугольник по:

- а) его стороне и проведенными к ней медиане и высоте;
- б) его стороне, прилежащему углу и высоте, проведенной к ней;
- в) его стороне, противолежащему углу и высоте, проведенной к другой стороне;
- г) его двум углам и высоте, проведенной к одной из противолежащих сторон;
- д) его углу и проведенным из другой вершины высоте и биссектрисе;
- е) его стороне, проведенной к ней медиане и углу между этой медианой и высотой, выходящей из той же вершины;
- ж) сумме и разности двух его сторон и высоте, проведенной к третьей стороне;
- з) его углу и двум высотам к сторонам этого угла;
- и) его углу, высоте, проведенной из другой вершины, и периметру;
- к) двум его сторонам и разности противолежащих им углов.

1528. Постройте окружность данного радиуса, которая:

- а) проходит через данную точку и касается данной прямой;
- б) касается данной окружности и данной прямой;
- в) проходит через данную точку и отсекает из данной прямой хорду данной длины;
- г) касается данной окружности и отсекает из данной прямой хорду данной длины;
- д) касается двух данных пересекающихся прямых;
- е) касается одной из данных пересекающихся прямых и отсекает на другой хорду данной длины;
- ж) отсекает из данных пересекающихся прямых хорды данной длины;
- з) касается двух данных параллельных прямых и проходит через данную точку.

1529. Постройте точку, которая:

- а) находится на данном расстоянии от данной прямой и равноудалена от двух данных точек;
- б) находится на данном расстоянии от данной прямой и равноудалена от двух пересекающихся прямых;

- в) находится в плоскости данного треугольника, отстоит от одной прямой на данный отрезок дальше, чем от другой, и на данный отрезок ближе, чем до третьей;
- г) находится на данной прямой и равноудалена от данной точки этой прямой и от другой данной прямой;
- д) находится на данной прямой, и разность расстояний ее до двух данных пересекающихся прямых равна данному отрезку;
- е) находится на данной прямой, а разность расстояний от этой точки до двух данных точек наибольшая.

1530. Постройте точку, из которой:

- а) один из данных отрезков виден под одним данным углом, а другой — под другим;
- б) стороны данного треугольника видны под равными углами.

1531. Постройте касательную к данной окружности, которая образует данный угол с данной прямой.

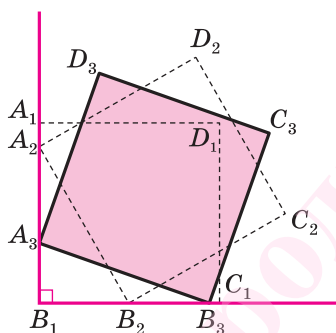


Рис. 479

1532. Квадрат со стороной 1 движется внутри прямого угла так, что две его соседние вершины находятся на сторонах угла (рис. 479). Выясните, по какой линии движется его центр.

1533. Есть прямая l и точки C и D по одну сторону от нее на расстояниях m и n соответственно. Точка X плоскости выбирается так, что прямые XC и XD пересекают прямую l в точках C_1 и D_1 соответ-

ственно и $\frac{XC}{XC_1} + \frac{XD}{XD_1} = k$ (рис. 480). Найдите геометрическое место таких точек X , учитывая, что:

- а) $m = 3$, $n = 1$, $k = 2$;
- б) $m = 5$, $n = 1$, $k = \frac{3}{2}$;
- в) $m = 5$, $n = 1$, $k = 3$.

1534. Прямая, проведенная через вершину M прямоугольника $MNKP$, пересекает диагональ NP и прямые KP и NK в

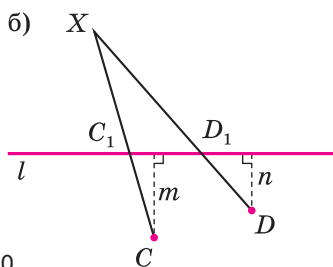
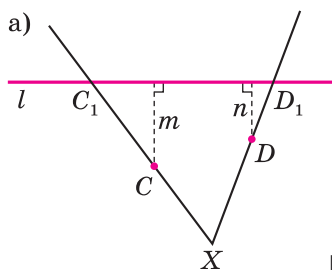


Рис. 480

точках A , B и C соответственно. Найдите отрезок NA , учитывая, что отрезки MC и MB соответственно равны p и q .

1535. Есть две точки P и Q . Найдите геометрическое место таких точек Y , что медиана:

- а) QQ_1 треугольника YPQ равна стороне PR ;
 б) PP_1 треугольника ZPQ равна высоте к стороне PQ .

1536. Найдите сумму квадратов расстояний от произвольной точки единичной окружности до вершин квадрата, описанного около этой окружности.

1537. Есть две точки A и B , расстояние между которыми равно 2. Найдите геометрическое место таких точек X , что:

- а) $AX^2 - BX^2 = 1$; б) $AX^2 + BX^2 = 10$.

1538. Через ортоцентр H равностороннего треугольника ABC проведена прямая m и на нее опущены перпендикуляры AA_1 , BB_1 , CC_1 из вершин A , B , C . Найдите HC_1 , учитывая, что $HA_1 = 6$ и $HB_1 = 1$.

1539. Есть прямой угол A и прямая l , проведенная через вершину A . Точки U и V находятся на разных сторонах угла A и отстоят от его вершины на 1. Точки U_1 и V_1 — образы точек U и V при симметрии относительно прямой l . Прямая, проведенная через точку U_1 параллельно прямой AV , пересекает прямую, проведенную через точку V_1 параллельно прямой AU , в точке Y . Найдите геометрическое место точек Y .

1540. Есть точка M на одной из двух прямых a и b , которые пересекаются под углом в 45° . Точка X выбирается так, что прямой X_1X_2 , где X_1 и X_2 — образы точки X при симметрии относительно прямых a и b , принадлежит точка M . Найдите геометрическое место точек X .

1541. Есть две точки I и J . На прямой IJ выбирается точка X и строятся квадраты со сторонами IX и JX по одну сторону от прямой IJ . Найдите геометрическое место середин отрезков, соединяющих центры построенных квадратов.

1542. Есть квадрат $PQRS$. Найдите геометрическое место точек Z плоскости, для которых $ZP + ZR = ZQ + ZS$.

1543. Прямая, проходящая через середину диагонали MO четырехугольника $MNOP$ параллельно прямой NP , пересекает прямую NO в точке A , а прямая, проходящая через середину диагонали NP параллельно прямой MO , пересекает прямую MP в точке B . Докажите, что прямые AB и OP параллельны.

1544. Найдите геометрическое место центров параллелограммов, стороны которых параллельны диагоналям данного четырехугольника, а вершины лежат на его сторонах.

1545. Постройте параллелограмм по его:

- а) двум смежным сторонам и диагонали;
- б) стороне и двум диагоналям;
- в) диагоналям и углу между ними;
- г) стороне, высоте, проведенной к этой стороне, и диагонали;
- д) сторонам и одному из углов;
- е) сторонам и высоте;
- ж) диагоналям и высоте;
- з) стороне, сумме диагоналей и углу между ними;
- и) стороне, разности диагоналей и углу между ними;
- к) стороне, одному из углов и сумме диагонали с другой стороной;
- л) стороне, одному из углов и разности диагонали с другой стороной;
- м) периметру, диагонали и углу между этой диагональю и стороной;
- н) одному из его углов и двум высотам;
- о) сторонам и углу между диагоналями;
- п) углу и двум диагоналям.

1546. Постройте прямоугольник по его:

- а) диагонали и углу между диагоналями;
- б) стороне и сумме диагоналей;
- в) диагонали и сумме измерений;

- г) его диагонали и разности измерений;
- д) стороне и углу между диагоналями;
- е) стороне и сумме диагонали с другой стороной;
- ж) стороне и разности диагонали с другой стороной.

1547. Постройте ромб по:

- а) его стороне и одному из углов;
- б) его диагонали и одному из углов;
- в) его стороне и диагонали;
- г) его диагоналям;
- д) его диагонали и высоте;
- е) его углу и диагонали, выходящей из вершины этого угла;
- ж) его углу и высоте;
- з) сумме его диагоналей и углу между диагональю и стороной;
- и) одному из его углов и сумме диагонали со стороной;
- к) одному из его углов и разности диагонали со стороной;
- л) его стороне и сумме диагоналей;
- м) его стороне и разности диагоналей;
- н) сумме его диагоналей и углу между диагональю и стороной;
- о) его стороне и радиусу вписанной окружности.

1548. Постройте квадрат по его диагонали.

1549. Через вершину параллелограмма проведите прямую так, чтобы расстояние до нее от противоположной вершины было равно сумме или разности расстояний до этой прямой от двух других вершин параллелограмма, учитывая, что прямая через внутреннюю точку параллелограмма:

- а) проходит; б) не проходит.

1550. Постройте трапецию по:

- а) ее основанию, прилежащему углу и двум боковым сторонам;
- б) разности ее оснований, двум боковым сторонам и одной диагонали;
- в) ее четырём сторонам;
- г) ее основанию, двум диагоналям и высоте;
- д) ее двум основаниям и двум диагоналям;
- е) ее трем сторонам и диагонали;
- ж) ее трем сторонам и высоте;
- з) ее боковой стороне, высоте и диагонали;
- и) ее основанию, прилежащих углах и высоте;
- к) ее основанию, диагоналям и углу между ними;

- л) ее боковой стороне, диагонали и углу между диагоналями;
- м) основаниям и двум диагоналям;
- н) ее диагоналям, средней линии и углу;
- о) ее диагоналям, углу между ними и сумме (разности) двух соседних сторон.

1551. Постройте четырехугольник по его:

- а) трем сторонам и двум диагоналям;
- б) четырем сторонам и углу;
- в) трем сторонам, диагонали и углу;
- г) двум смежным сторонам, диагоналям и углу между ними;
- д) двум противолежащим сторонам, углу и диагоналям;
- е) трем сторонам и двум соседним углам;
- ж) двум смежным сторонам, двум соседним углам и углу между диагоналями;
- з) двум противолежащим сторонам и трем углам;
- и) трем сторонам и углом, прилежащим к четвертой стороне;
- к) двум противоположным сторонам и углу между ними;
- л) сторонам и углу между двумя противоположными сторонами;
- м) диагоналям, углу между ними и двум противоположным углам;
- н) сторонам и отрезку, соединяющему середины диагоналей.

1552. Впишите:

- а) в данный прямоугольный треугольник такой квадрат, который бы имел с треугольником общий угол;
- б) в данный треугольник такой ромб, который бы имел с треугольником общий угол;
- в) в данный треугольник такой квадрат, одна сторона которого лежала бы на стороне треугольника;
- г) в данную окружность треугольник с двумя данными углами.

1553. Постройте пятиугольник по серединам его сторон.

1554. Постройте угол, который:

- а) вписан в данную окружность, опирается на данную дугу и отсекает на данной прямой отрезок данной длины;
- б) равен данному углу, вписан в одну из данных окружностей и описан около другой.

1555. Постройте отрезок, который:

- а) равен и параллелен данному и концы которого принадлежат пересекающимся прямым;

- б) является кратчайшим из отрезков, проходящих через данную точку и имеющих концами точки на двух данных прямых;
- в) равен и параллелен данному и концы которого принадлежат данным окружностям;
- г) делится пополам данной точкой и концы которого принадлежат данным окружностям.

1556. Постройте треугольник по его:

- а) двум сторонам и радиусу описанной окружности;
- б) стороне, проведенной к ней высоте и радиусу описанной окружности;
- в) стороне, прилежащему к ней углу и радиусу описанной окружности;
- г) двум углам и радиусу описанной окружности;
- д) стороне, проведенной к ней медиане и радиусу описанной окружности;
- е) высоте, углу и радиусу описанной окружности;
- ж) стороне, высоте, проведенной к другой стороне, и радиусу описанной окружности;
- з) высоте и биссектрисе, проведенным из одной вершины, и радиусу описанной окружности;
- и) двум углам и радиусу вписанной окружности;
- к) стороне, прилежащему к ней углу и радиусу вписанной окружности;
- л) стороне, высоте, проведенной к другой стороне, и радиусу вписанной окружности;
- м) высоте, углу, из которого она проведена, и радиусу вписанной окружности;
- н) стороне, противолежащему углу и радиусу вписанной окружности;
- о) углу и радиусам описанной и вписанной окружностей;
- п) двум углам и радиусу внеписанной окружности, расположенной против третьего угла;
- р) углу, радиусу внеписанной окружности, расположенной против этого угла, и высоте, проведенной из другого угла;
- с) углу, радиусу описанной окружности и сумме (разности) двух сторон, из которых одна расположена против данного угла;
- т) радиусу вписанной окружности, углу и отрезку, который равен сумме стороны против этого угла и еще одной стороны, уменьшенной на третью сторону.

1557. Постройте прямоугольный треугольник по его:

- а) катету и радиусу вписанной окружности;
- б) гипотенузе и радиусу вписанной окружности;
- в) радиусам описанной и вписанной окружностей;
- г) острому углу и радиусу описанной окружности.

1558. Постройте равнобедренный треугольник по его:

- а) боковой стороне и радиусу описанной окружности;
- б) основанию и радиусу описанной окружности;
- в) углу, прилежащему к основанию, и радиусу описанной окружности;
- г) высоте, проведенной к основанию, и радиусу описанной окружности;
- д) высоте, проведенной к основанию, и радиусу вписанной окружности;
- е) основанию и радиусу вписанной окружности;
- ж) углу при вершине и радиусу вписанной окружности.

1559. Постройте четырехугольник по его:

- а) трем сторонам и радиусу описанной окружности;
- б) двум противолежащим сторонам, углу и радиусу описанной окружности;
- в) двум смежным сторонам, углу, прилежащему к одной из них, и радиусу описанной окружности;
- г) двум соседним углам, стороне, прилежащей к одному из них, и радиусу описанной окружности;
- д) двум противоположным сторонам, диагонали и радиусу описанной окружности;
- е) двум диагоналям, стороне и радиусу описанной окружности;
- ж) двум смежным сторонам, углу, прилежащему к одной из них, и радиусу вписанной окружности;
- з) двум противоположным углам, стороне и радиусу вписанной окружности;
- и) трем углам и радиусу вписанной окружности.

1560. Найдите:

- а) значение выражения $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}} - \sqrt{11 + 4\sqrt{7}}$;
- б) десятую долю числа $\frac{0,(3) + 1,1(6)}{0,(3) + 0,1(6)}$;

в) сумму тех двузначных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 3;

г) удвоенное значение выражения $\frac{\log_2 24}{6 - \log_4 81} + 27 \cdot \log_{0,125} 0,25$.

1561. Найдите значение выражения:

а) $|x^{3a} - x^{-3a}|$, учитывая, что $x^{2a} + x^{-2a} = 6$;

б) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{5\pi}{4} + x\right)$, учитывая, что $\sin x - \cos x = x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

1562. Упростите выражение:

а) $\frac{x^3 - 2x^2 - 16x + 32}{(-x-1)^5 + (1+x)^5 + (-x-1)^2 - 9}$; б) $x^2 \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - 2$, учитывая,

что $x < -1$.

1563. Найдите:

а) ближайшие целые числа, между которыми находится значение выражения $(\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \dots \cdot \log_9 8 \cdot \log_{10} 9)^{-1}$;

б) произведение корней уравнения $x^2 - 3x = 1 - \sqrt{x^2 - 3x + 5}$;

в) сумму корней уравнения

$$\frac{x^2 - x + 2}{3x^2 - 5x - 14} = \frac{x^2 - x + 6}{3x^2 - 5x - 10};$$

г) количество целых решений неравенства $\frac{4-x}{x^2-x-6} \geq \frac{1-x}{x^2+2x}$, модули которых не превышают 4.

1564. Катер за 80 мин прошел 5 км по озеру и 13 км против течения реки. Найдите скорость катера по озеру, учитывая, что скорость течения реки равна 2 км/ч.

1565. Найдите все значения переменной m , при которых уравнение $(1-x)|x+2| = m^2$ имеет три корня.

1566. Расстояние между точками M и N , в которых прямые, проведенные через точку A , касаются окружности, равно 60 см. Найдите радиус окружности, учитывая, что $AM = 78$ см.

1567. Найдите:

а) количество корней уравнения $\sqrt{-x} + \sqrt{1+x} = 1 + \sqrt{-x}$;

б) произведение корней уравнения $\log_4 x + \log_x 0,0625 = 1$;

- в) сумму корней уравнения $\sin 3x - \cos 8x = 2$, принадлежащих промежутку $[-180^\circ; 270^\circ]$;
- г) количество целых чисел в области значений функции $y = |x - 1| + |2x + 4|$, заданной на множестве $[-3; 2]$;
- д) наибольшее целое число из промежутка убывания функции $y = x^2 + x^{-4}$.

1568. Найдите:

- а) произведение абсцисс тех точек графика функции $y = -x^3 + 3x^2 + 16x + 2$, в которых касательная образует с осью абсцисс угол 45° ;
- б) медиану треугольника с вершинами в точках $(-7; 3)$, $(-5; 1)$ и $(-2; -1)$.

1569. Найдите:

- а) какую часть от поверхности шара составляет площадь его сечения плоскостью, перпендикулярной диаметру и делящей его в отношении $1 : 4$;
- б) при каком боковом ребре правильная четырехугольная пирамида имеет наибольший объем, учитывая, что периметр боковой грани равен 36 см.

* * *

1570. На смежных сторонах AB и BC ромба $ABCD$ построены такие правильные треугольники ABF и BCG , что один из них лежит вне ромба, а другой имеет с ромбом общую треугольную часть. Докажите, что точки D , F и G лежат на одной прямой.

1571. Решите уравнение $4\cos 2x - \cos 4x = 16x + 3$.

1572. Докажите, что при положительных значениях переменных a , b , c , d истинно неравенство

$$\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{cd} + \frac{c^4}{da} + \frac{d^4}{ab} \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

ОТВЕТЫ

Раздел I

9. $\sqrt{386}$ см. 10. 21 см. 11. а) 45 см^2 ; $\frac{15\sqrt{15}}{4} \text{ см}^3$; б) $2a^2\sqrt{3}$; $\frac{a^3}{\sqrt{3}}$.
 13. а) $3al + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; б) $4al + 2a^2$; в) $3a^2\sqrt{3} + 6al$. 14. 26 см. 15. а) 4464 см^2 ,
 9828 см^3 ; б) $32\sqrt{3} + 24\sqrt{11} + 8\sqrt{33} \text{ см}^2$, $48\sqrt{11} \text{ см}^3$; в) $72(1 + 2\sqrt{2}) \text{ см}^2$,
 $216\sqrt{2} \text{ см}^3$; г) $2a^2(\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta + \text{tg } \alpha \text{tg } \beta)$, $a^3 \text{tg } \alpha \text{tg } \beta$; д) $\frac{l^2}{2}(1 + 2\sqrt{2})$, $\frac{l^3\sqrt{2}}{8}$.
 16. 90 см^2 , $35\sqrt{3} \text{ см}^3$. 17. $3\sqrt{30}$ м, $6\sqrt{5}$ м, $72\sqrt{15} \text{ м}^2$, $13,5\sqrt{165} \text{ м}^3$. 18. а) 400 см^2 ,
 $500\sqrt{3} \text{ см}^3$; б) $200\sqrt{3} \text{ см}^2$, $108\sqrt{2} \text{ см}^3$. 19. 45° и 135° . 20. $128\sqrt{21} \text{ см}^2$.
 22. $80\sqrt{2} \text{ см}^2$. 23. 960 см^2 . 24. 18 144 см^2 . 25. $2d^2 \sin \varphi (\sin \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \varphi})$.
 26. $\frac{\sin \varphi}{2 \sin \beta (1 + \sin \varphi + \cos \varphi)}$. 28. а) $V_1 + V_2$; б) $\frac{2}{3}V_1 + V_2$. 30. $\approx 3,7 \text{ кг}$.
 31. $240\sqrt{2} \text{ см}^3$. 32. а) $729\sqrt{2} \text{ см}^3$; б) $\frac{h^3 \sin \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}}{\sin^2 \beta}$. 33. $432\sqrt{3} \text{ см}^3$.
 34. а) $\frac{\sqrt{2}}{8} \text{ м}^3$; б) $1728\sqrt{2} \text{ см}^3$. 35. 2310 см^3 . 36. а) $\frac{75\sqrt{3}}{4} \text{ см}^3$; б) $96\sqrt{2}$.
 37. $\frac{a^3}{4}$. 38. $\frac{l^3 \sin \alpha \sin \beta \cos^2 \beta}{4(1 - \cos \alpha)}$. 39. $\frac{Q^2 \sin 2\beta}{2a}$. 40. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. 41. $\frac{l^3 \text{tg } \varphi}{4}$.
 42. 72 см^3 . 43. $192\sqrt{3} \text{ см}^3$. 44. $\frac{ab\sqrt{3(4a^2 - b^2)}}{8}$. 45. 300 см^3 . 46. $16\sqrt{3} \text{ см}^3$.
 47. а) $abc\sqrt{-\cos 2\varphi}$; б) $18\sqrt{39} \text{ см}^3$. 49. 1080 см^3 . 50. $\sqrt{S_1 S_2 S_3}$; $72\sqrt{2} \text{ дм}^3$.
 51. $1296\sqrt{11} \text{ см}^3$. 52. 105 см^3 . 53. 60 см^3 . 54. 2 м, 1 м, $\sqrt{5}$ м, 3 м.
 57. 612 см^3 . 59. 1050 см^3 . 60. $2\sqrt{3} + \sqrt{39} \text{ см}^2$, $2,25 \text{ см}^3$. 61. 154.
 62. а) 18 000; б) 72 000. 63. 60. 64. $\frac{3}{4}$. 65. $n = 13k - 2$, $k \in \mathbb{Z}$. 66. 2521.
 67. 105. 68. а) $\left(-\infty; \frac{9 - \sqrt{113}}{4}\right] \cup \left[\frac{9 + \sqrt{113}}{4}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup (-1; +\infty)$;
 в) $[0,5; 2]$; г) $(-0,5; 0,6]$. 70. а) $[2; 8]$; б) $[-5; 5]$; в) $(0, 1]$; г) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.
 71. 13. 72. 30; 33. 73. 42; 66. 74. 27; 28,5. 75. 36; 63. 76. 0,8. 87. а) 5 м;
 б) 29 см; в) 125. 88. а) 12 см; б) $6\sqrt{3} \text{ см}$; в) $144\sqrt{3} \text{ см}^2$. 89. а) $2a^2$; б) $2\pi a^2$;
 в) $4\pi a^2$; г) πa^3 . 90. а) $20\sqrt{2} \text{ см}$; б) $200\pi \text{ см}^2$; в) $800\pi \text{ см}^2$; г) $4000\pi\sqrt{2} \text{ см}^3$.
 92. $2\sqrt{10}\pi$ м. 93. 256 см^2 . 94. 8 см. 95. rh. 96. а) 5 дм; б) 6 см.
 97. $\cos \varphi$. 98. $\sqrt{S^2 - 4h^2 d^2}$. 99. $S\sqrt{2}$. 100. $\pi^2 \text{ м}^2$; $\frac{\pi^2}{4} \text{ м}^3$. 101. $\frac{S}{\pi}$.
 102. 6 см; 18 см. 103. $\approx 3,3 \text{ м}^2$. 104. $\frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$; $\frac{d^2}{4\pi} (2\pi \sin \varphi + \cos \varphi + 1)$.
 106. $\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{2\pi(S_1 + S_2)}}$. 107. $1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. 108. $\arctg \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$. 109. $300\pi \text{ дм}^2$. 110. $\frac{p}{2}$; $\frac{p}{4}$.

111. 20 см или 100 см. 112. $\frac{2\pi a^2}{3}(1 + \sqrt{2})$. 113. h^2 . 114. а) 108π см³;
 б) $\frac{10}{\sqrt{34}}$ см; в) 3 см. 115. 208 м. 116. ≈ 1513 т. 117. $\frac{S}{2}\sqrt{\pi Q}$. 118. $\approx 106,8$ кг.
 121. 4 : 1. 122. $\frac{3\pi a^3}{4}$. 123. а) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; б) $\frac{2}{\pi}$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$; г) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$; д) $\frac{n \sin 360^\circ}{2\pi}$.
 124. 45° . 125. $\frac{\pi a^2 h}{4 \cos^2 \alpha}$. 126. $\frac{\pi m^3 \cos \alpha \sin 2\alpha}{8}$. 127. $\frac{\pi a^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2}$.
 130. $\frac{\pi m^3}{8} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. 136. а) $\frac{\sqrt{a-1}(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}}$; б) $\frac{1}{n}$; в) $\frac{m^2}{n^2}$; г) $\frac{1}{m}$.

Раздел II

284. а) $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(3; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$; д) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; е) $(-\infty; +\infty)$. 285. а) $a \geq 0$; б) $x \leq 0$; в) $u = \pm \frac{1}{141}$; г) $v = 0$.
 292. а) 2; б) 27; в) 1; г) 9. 293. а) a ; б) $\sqrt{x}$; в) a^5 ; г) $y^{1,3}$. 294. а) $\frac{2a\sqrt{2}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}}$;
 б) $a^{\sqrt{3}} + 1$; в) $a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} - b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}$; г) $|x^\pi - y^\pi|$. 295. а) a^{-1} ; б) $\sqrt{m^9}$; в) a^5 ; г) a^{-2} ; д) $-a$;
 е) $2y$. 303. а) 5; б) -8; в) 5; г) 2. 304. а) 0; б) 0; в) -5; г) 10; д) 2; е) 2. 305. а) 24;
 б) 29. 306. 45. 307. 3. 308. 16; 30; 34. 309. $-\frac{2\pi}{9}$. 310. $\frac{17}{4} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3)$.
 317. $\frac{8}{7}$ см; $\frac{90}{7}$ см. 318. 3,75 см. 319. 11 см. 346. а) $\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$; ж) $\sqrt{2}(2x-2)^{\sqrt{2}-1}$.
 347. 8 см, 15 см. 348. $\frac{15\sqrt{10}}{4}$ см. 349. 48. 350. а) 48; б) 54. 351. 7,5; 19,2.
 352. а) -19; б) 9. 353. а) $(-1; 1)$; б) $(2; 6)$; в) $(-2; 5)$; г) $(-5; 6)$. 354. а) 2; 9;
 б) $-8 \pm \sqrt{6}$; в) -17; -3; $-10 \pm 2\sqrt{10}$; г) $-\frac{1}{12}$; $\frac{1}{2}$. 355. а) $\frac{1}{4}$; б) -1; -0,5; в) -2;
 г) -0,5. 356. а) 0,22; б) 6; в) -0,75; г) -4,84. 357. а) $(1; +\infty)$; б) $[3; 7)$;
 в) $(3; 4,8]$; г) $[-6; 3]$; д) $(3; +\infty)$; е) $[0,5; 5)$. 369. а) 19; б) 3; в) 8; г) 0;
 д) 28; е) 6. 370. а) 7; б) 8; в) 5; г) 0; 25; д) 0; 16; е) 0. 371. а) 7; б) 6;
 в) -0,5; г) 0. 372. а) 6; б) -1; в) 2,5; г) -2; д) 0; е) 0,6. 373. а) -1; 4; б) 2; в) 1;
 г) ± 4 ; д) -2; 6; е) -2; 1; ж) -7; 2; з) $\frac{1 \pm \sqrt{649}}{18}$; $\frac{1 \pm \sqrt{60589}}{18}$. 374. а) $\frac{5}{8}$;
 б) -2; 0; в) -3,5; 0; 1,5; г) 0,6. 375. а) 2; 3; б) 7; 8; в) 2; г) нет корней;
 д) 0; е) -2; $\frac{14}{9}$; ж) $2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$; з) 0; 2. 376. а) $(1; 8)$; б) $\left(\frac{45-5\sqrt{65}}{18}; \frac{45+5\sqrt{65}}{18}\right)$;
 в) $(-1; 2)$; г) $(2,5; 1,5)$. 377. а) $(2; 8)$; $(8; 2)$; б) $(10; 5)$; в) $(1; 4)$; г) $(5; 6)$.
 378. а) $(-2; 14]$; б) $[3; +\infty)$; в) $[4; 5]$; г) $[42; +\infty)$; д) $[3; +\infty)$; е) $[-48; 16]$.
 379. а) $(-\infty; 0] \cup (4,5; +\infty)$; б) $(-\infty; 0]$; в) $\left[-\frac{10}{13}; 2\right] \cup [3; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$;
 д) $[3; +\infty)$; е) $\left[4; 4\frac{9}{16}\right]$; ж) нет решений; з) $[4; 5]$; и) $\left[3; 1 + \frac{16}{\sqrt{15}}\right]$; к) нет
 решений. 380. а) $(-2; 0) \cup (0; 2)$; б) $[0; 3]$; в) $[2; 5]$; г) $[-1; 0]$; д) $[-3; 1]$.

385. а) Нет корней, если $c < 1$; 0, если $c = 1$; $\pm 0,5\sqrt{c-1}$, если $1 < c \leq 2$; $0,5\sqrt{c-1}$, если $c > 2$; б) нет корней, если $c < 0$ или $0 < c < 2$; 0, если $c = 0$; $2\sqrt{c-1}$, если $c \geq 2$; в) 0, $\frac{1}{(2+c)^2}$, если $c < -2$; 0, если $c \geq -2$; г) нет корней, если $c < 2$; $\frac{c^4 + 20c^2 + 16}{4c^2}$, если $c \geq 2$;
- д) нет корней, если $c < 2$; $\pm \frac{c}{2}\sqrt{\frac{c^2-4}{c^2-1}}$, если $c \geq 2$; е) $\frac{c(c-4)}{2(2c+1)}$, если $c \leq -2$ или $-0,5 < c \leq 0$; нет корней, если $-2 < c \leq -0,5$ или $c > 0$.
386. а) Нет корней, если $d < 0$ и если $0 < d < 1$; 0, если $d = 0$; $\frac{2d-1-\sqrt{4d-3}}{2}$, если $d \geq 1$;
- б) нет корней, если $d < -0,25$; $\frac{-1 \pm \sqrt{4d+1}}{2}$, если $-0,25 \leq d \leq 0$; $\frac{-1 \pm \sqrt{4d+1}}{2}$, если $0 < d < 1$; $\frac{-1-\sqrt{4d+1}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{4d-3}}{2}$, если $d \geq 1$;
- в) $11-d+\sqrt{6-d}$, если $d < 2$; $11-d \pm \sqrt{6-d}$, если $2 \leq d \leq 6$; нет корней, если $d > 6$; г) 0.
387. а) $a \geq 0$; б) $a \geq -0,25$; в) $0 < a \leq \sqrt{5}$; г) $a \geq 1$; д) $a \geq 1$; е) $a \geq 0$.
388. а) $c \in [-1; -0,5) \cup (1,5; 2]$; б) $b \geq 1$.
389. а) $3 + \sqrt{2}$; б) $a = -2c$, $b = c^2$, $c > 0$.
390. а) $\left(-\frac{|a|}{\sqrt{5}}; |a|\right]$, если $a \neq 0$; нет решений, если $a = 0$; б) нет решений, если $a \leq 2$; $\left[6; 6 + \left(\frac{a^2-4}{2a}\right)^2\right)$, если $a > 2$.
391. а) $[4; +\infty)$; б) $[-1,25; +\infty)$; в) $[-0,25; +\infty)$; г) $[4,5; +\infty)$; д) $[1,5; +\infty)$; е) $\left[-\frac{13}{12}; +\infty\right)$.
392. а) -1; б) 16; в) -3; г) 7.
393. а) Ни при каких; б) $a = 2$, $b = 0$, $c = 3$; в) ни при каких; г) $a = -2$, $b = -3$, $c = 3$.
394. а) -3; -0,5; -9; б) 0,3; 1,5; 3,5; в) 0,2; 2,5; 3,75; г) -4; 3; 12.
395. а) 5 км/ч; 4 км/ч; б) 5,25 км/ч; 3,75 км/ч.
396. а) 4 км; б) 4 км/ч; 5 км/ч; 3 км/ч.
397. а) Прямоугольный; б) тупоугольный; в) остроугольный.
398. а) 72° , 63° , 45° ; б) $67,5^\circ$, 60° , $52,5^\circ$; в) 75° , 65° , 40° .
399. а) $\frac{441}{20}$; $\frac{21\sqrt{41}}{20}$; б) 7; 24; 25;
- в) $\frac{169}{12}$; $\frac{65}{12}$; г) 15; 17.
400. а) $3\sqrt{2}$; б) 30; в) $12\sqrt{30}$; г) $(2 + \sqrt{13}) \cdot \sqrt{3}$.
401. 4 см².
402. $\frac{l^2\sqrt{5}}{8}$. 403. 8 см. 404. $\frac{1}{6}$. 405. $\frac{2}{9}mn$. 406. 56 см. 407. 42; 49. 408. $5\sqrt{2}$.

Раздел III

416. а) $b^2 \sin \alpha \cos \alpha$; б) $\frac{a^2 \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha}{4}$.
417. а) $a^2 \sqrt{3}$; $\frac{a^2 \sqrt{39}}{4}$; б) 60° .
425. 20 см². 426. а) $\frac{65}{2 \cos \alpha}$; б) $\frac{4}{\sin \beta}$.
427. 37 см, $25\sqrt{2}$ см. 428. 790 см².
429. 6912 см². 430. 10 см, 12 см. 431. а) $4\sqrt{3}$ см; б) $48(\sqrt{2} + 1)$ см². 432. 12 см,

- $\sqrt{\frac{407}{3}}$ см. 433. $\frac{|a^2 - b^2|}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$. 434. $72(3 + 3\sqrt{3} + \sqrt{6})$ см². 435. $192\sqrt{2}$ см².
 436. 189 см². 437. 26 см. 438. $64\sqrt{3}$ см². 439. 12 см. 440. а) $\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}$;
 б) $\arccos \frac{6H^2 - a^2}{6H^2 + 2a^2}$; в) $\arctg \frac{H\sqrt{3}}{a}$; г) $\operatorname{arctg} \frac{2H\sqrt{3}}{a}$; д) $2\arcsin \sqrt{\frac{3H^2 + a^2}{12H^2 + a^2}}$.
 441. $72(\sqrt{7} + 1)$ см². 442. а) $\frac{l\sqrt{\cos \alpha}}{1 - \cos \alpha}$; б) $\frac{l}{2\sin \frac{\alpha}{2}}$; в) $\arccos \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$;
 г) $2\arcsin \left(\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right)$. 443. $3a^2$. 445. 24 см, 56 см. 446. $\sqrt{7}$ дм. 447. 16 см².
 448. 24 м², 30°. 449. а) 6 дм³; б) 4,95 м³. 450. $64(\sqrt{26} + 1)$ см², $426\frac{2}{3}$ см³.
 451. $63\sqrt{3}$ см², $36\sqrt{3}$ см³. 452. 50 см³. 453. а) $\frac{4}{3}h^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha$; б) $\frac{a^3 \sqrt{\cos 2\alpha}}{6 \sin \alpha}$;
 в) $\frac{a^3 \cos \frac{\alpha}{2}}{3\sqrt{-2 \cos \alpha}}$; г) $\frac{4r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \sqrt{-\cos 2\alpha}}{3 \cos \alpha}$; д) $\frac{2H^3}{3} \operatorname{ctg}^2 \beta$; е) $\frac{m^3}{6} \sqrt{\frac{2 \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$;
 ж) $\frac{l^3}{3} \cos \varphi \sin 2\varphi$. 454. $\frac{h^3}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha$; $\frac{h^2}{\cos \alpha} (1 + \sin \alpha)$; $\frac{h^2}{\cos \alpha} (1 + \sin \alpha + \cos \alpha)$.
 455. а) $\frac{b^3 \sqrt{3}}{4} \sin \alpha \cos^2 \alpha$; б) $\frac{b^3}{3} \cos^2 \alpha \sqrt{1 - 2 \cos 2\alpha}$; в) $\frac{2}{3} R^3 \sin^2 \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + 2 \cos \alpha}$;
 г) $180\sqrt{3}$ см³; д) $\frac{l^3}{2} \sin \varphi \cos^2 \varphi$; е) $\frac{l^3}{3} \cos^2 \alpha \sqrt{1 - 2 \cos 2\alpha}$; ж) $\frac{l^3}{3} \sin^2 \frac{\beta}{2} \sqrt{1 + 2 \cos \beta}$;
 з) $\frac{a^3}{3 \sin \frac{\varphi}{2}} \sqrt{1 + 2 \cos \varphi}$. 456. $52\sqrt{419}$ см³. 457. $2520\sqrt{3}$ см³, $36\sqrt{1333}$ см².
 458. а) $\frac{3380\sqrt{3}}{9}$ см³; б) $\frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{12} \operatorname{tg} \varphi$; в) 360 см³. 459. $\operatorname{arctg} \frac{12V}{b^3 \sin \alpha}$.
 460. а) $\frac{c^3}{24} \sin 2\varphi \operatorname{tg} \alpha$; б) 48 см³; в) $\frac{1}{6} abc$. 461. $1400\sqrt{3}$ см³. 462. $27\sqrt{11}$ см³.
 463. 576 см³; 465. $240\sqrt{3}$ дм³; $1680\sqrt{3}$ дм³. 466. ≈ 127 г. 467. 9 см, 11 см, $\frac{868}{3}$ см³.
 468. $156\sqrt{2}$ см³. 469. а) $\frac{n^3}{24} \operatorname{tg} \varphi$, $\frac{m^3 - n^3}{24} \operatorname{tg} \varphi$ ($m > n$); б) $\frac{a^3 \sqrt{3}}{48}$, $\frac{7a^3 \sqrt{3}}{48}$.
 470. 9,6. 471. 16. 472. а) 75; б) $\frac{(m + n + b)^2}{m + n}$. 473. 12; 25. 474. 5; 7,5. 475. 53
 и 147. 476. $\frac{2}{5}$ или $\frac{7}{15}$. 477. 10. 478. а) 3 см + 7 см; 3 см + 14 см; 14 см + 7 см;
 б) 2 см + 13 см; 2 см + 24 см; 24 см + 13 см; в) 3 см + 17 см; 3 см + 48 см;
 48 см + 17 см. 479. 102 см, 150 см. 480. 50 см, 104 см. 481. 16 м,
 10 м. 487. а) 144π см²; б) $\pi m^2 \sin 2\varphi$; в) $\pi a^2 (3 + 2\sqrt{3})$. 488. 51 см.
 489. а) 108π см²; б) 72π см²; в) 36π см². 490. а) $\frac{\pi a^2 (1 + \operatorname{tg} \varphi)}{4 \sin^2 \alpha}$; б) $0,9\pi$ м²;
 в) $25\pi (1 + \sqrt{2})$ см². 491. 8π см², 4π см². 492. а) $\approx 255^\circ$; б) $\approx 312^\circ$; в) $\frac{360^\circ \cdot r}{l}$.
 493. 4π м²; $4\sqrt{2}$ м. 494. 30°. 495. $16\pi\sqrt{2}$ см². 496. $\frac{\pi}{3} bc^2 \sin^2 \alpha$. 498. $\arccos 0,6$.

499. $\frac{1}{\pi}\sqrt{S_0^2 - S^2}$. 500. $100\sqrt{6}$ см². 501. а) $\frac{r^2\sqrt{3}}{2}$; б) $2h^2$; в) $\frac{r^2\sqrt{3}}{2}$; г) 200 см²;
 д) $\frac{\pi R^2 d^2}{H^2}$. 502. а) m^2 ; б) $m^2\sqrt{2}$; в) $m^2\sqrt{3}$; г) $2m^2$. 503. $-\frac{1}{3}$. 504. 375 см³.
 505. $\frac{H}{3}\sqrt{3}$; $\frac{H}{3}\sqrt{6}$. 506. $0,75l$. 507. 3 см. 508. а) $\frac{\pi Q^2}{a}$; б) 1404π см³;
 в) $\frac{2}{3}\pi S\sqrt{S\sin 2\alpha}$. 509. а) $\frac{\pi H^3}{12}$; б) $\frac{833\pi\sqrt{2}}{12}$ см³; в) $\frac{P^2}{3\pi^2 l^3}\sqrt{\pi^2 l^4 - P^2}$;
 г) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{Q(P^2 - Q^2)}{\pi}}$. 510. а) $\frac{2\pi \cdot 10^4}{3}$ см³; б) $27\,000\pi$ см³; в) $\frac{1}{3} \cdot 85\pi\sqrt{3}$ см³;
 г) $24\,696\pi \operatorname{ctg} 65^\circ$; д) ≈ 4065 дм³; е) $103,2$ см³. 511. а) 144π см³; б) 9 см;
 в) $\sqrt{\frac{3p}{\pi m}}$. 512. $1:7:19$. 513. а) $\frac{H}{2}(2 - \sqrt[3]{4})$. 514. 60 см². 515. а) 15 см;
 б) 16 см. 516. 160π см². 518. а) 12 ; б) 36 дм². 519. 12π м³, 84π м³.
 520. 14 м. 521. $\frac{\pi c^3}{3}\sin^2 2\alpha$. 522. 500π см³. 523. $1 + \sqrt{3}$. 524. а) $72\sqrt{3}$ см²;
 б) $24(3 + \sqrt{17})$ см²; в) $18(3\sqrt{3} + \sqrt{43})$ см²; г) $\frac{15\sqrt{2}}{2}(3\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{125 - 7\sqrt{5}})$ см².
 525. $\frac{\pi a^3}{24} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}$. 526. $\frac{\pi a^3}{24} \operatorname{tg} \beta \sin^3 \varphi$. 527. а) $\frac{3\sqrt{3}}{4}(29 + 7\sqrt{73})$ см²;
 б) $(14,5 + 14\sqrt{41})$ см²; в) $\frac{3}{4}(7\sqrt{91 + 58\sqrt{3}})$ см²; г) $\frac{5\sqrt{5}}{8}(29\sqrt{2 + 2\sqrt{5}} +$
 $+ 14\sqrt{57\sqrt{5} - 32})$ см². 528. а) $\frac{RH\sqrt{2}}{H + R\sqrt{2}}$; б) $\frac{RH\sqrt{3}}{H + R\sqrt{3}}$. 529. $\frac{l\sqrt{3}}{3}$.
 531. а) $-6,875$; б) 4 ; в) 5 ; г) $0,81$; д) 8 ; е) $0,25$. 532. а) 17 ; б) -2 ;
 в) -20 ; г) -14 . 533. а) $\frac{(a+x+1)^2}{2ax}$; б) uv ; в) $\frac{1}{c+d}$; г) 1 ; д) $b+c$; е) $1-r^2$; ж) 2 ;
 з) $\sqrt{p}$. 534. а) $-1,5$; б) $1,02$; в) 36 ; г) 2 . 535. а) 6 ; б) 4 ; -61 ; в) -2 ; 5 ; г) 1 ; 32 .
 536. 124 . 537. 4 . 538. $\frac{17}{19}$. 539. -7 ; $-\frac{107}{3}$.

Раздел IV

563. а) $\left[\frac{1}{25}; 5\right]$; б) $\left[\frac{1}{5}; 25\right]$; в) $\left[\frac{1}{121}; 11\right]$; г) $\left[\frac{1}{11}; 121\right]$. 565. а) 8 ; $\frac{1}{2}$; б) 4 ; 1 ; в) 8 ;
 1 ; г) 1 ; $0,25$. 566. а) 2 ; $\frac{1}{2}$; б) 2 ; $\frac{1}{2}$; в) 9 ; 6 ; г) 3 ; -1 . 567. а) $(-3; +\infty)$;
 б) $(-21; +\infty)$; в) $(2; +\infty)$; г) $[1; +\infty)$; д) $(0; 1)$; е) $(0; 1]$. 568. а) $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$;
 б) $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$; в) $[0; 1)$; г) $[1; +\infty)$; д) $(-1; +\infty)$; е) $(-\infty; +\infty)$. 572. а) $m = 2$;
 б) $0 < m < 1$; в) $-1 < m < 0$; г) $m = -1$; д) $1 < m < 2$; е) $-4 < m < -3$. 573. а) $0 < a < 1$;
 б) $a > 1$; в) $a > 1$; г) $a > 1$. 577. а) 0 ; б) 0 ; в) $(0; +\infty)$; г) $(-\infty; 0)$. 579. 63 .
 580. 9 ч $8\frac{116}{143}$ мин, 13 ч $45\frac{105}{143}$ мин. 581. $1 + \sqrt{26}$ км. 582. 980 ц.

583. а) $\frac{2\pi}{9}$; б) $\frac{2\pi}{9}$; в) $-\frac{\pi}{12}$; г) $-\frac{5\pi}{18}$. 586. $\frac{35a^2\sqrt{3}}{36}$. 587. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.
588. а) $\frac{a^2\sqrt{33}}{4}$; б) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$. 589. $40\pi\sqrt{3}$ см²; 88π см³. 594. з) $\frac{1}{3}$; и) $-\frac{1}{3}$;
- к) -5 ; л) $2\frac{1}{4}$; м) $5,4$. 598. 48. 602. а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt[4]{N}$; в) 3 ; г) 3 ; д) $\frac{2}{3}$; е) 4 ;
- ж) $\frac{1}{\sqrt[4]{4}}$; з) $\frac{1}{\sqrt[4]{4}}$; и) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. 603. в) 25 ; г) -3 ; д) $5,5$; е) 3 ; ж) 7 ; з) $\frac{1}{3}$; и) $5^{-\frac{1}{8}}$.
604. а) $2^{-\frac{2}{3}}$; б) $\frac{1}{27}$; в) $-2,5$; г) 2 ; д) $\frac{1}{80}$; е) $3^{-\frac{1}{2}}$; ж) $2,5$; з) $-2,4$; и) 2 ; к) $\frac{1}{2}$;
- л) 3 ; м) $0,5$. 605. а) $(-\infty; 4)$; б) $(0,5; +\infty)$; в) $(-\infty; 7)$; г) $(-7; 7)$;
- д) $(-3; 0) \cup (2; +\infty)$; е) нигде не определено; ж) $(-\infty; 0,5)$; з) $(-\infty; 0)$;
- и) $(-\infty; 1)$; к) $(0,5; 1) \cup (1; +\infty)$. 606. а) $a = b > 0$ и $a \neq 1$; б) $b = 2a - 1$ и $a > 0,5$. 610. а) 1 ; б) 2 ; в) 3 ; г) 2 ; д) 4 ; е) -3 ; ж) 2 ; з) -3 . 611. а) $\frac{4}{3}$; б) $1,5$;
- в) -2 ; г) -4 . 612. а) $x = a^4b^7$; б) $x = \frac{a^2}{b^3}$; в) $x = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[5]{b}}$; г) $x = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[7]{b^4}}$.
613. а) $\frac{a^3b^2}{\sqrt{xy^4}}$; б) $\sqrt{x} \operatorname{tg} x$; в) $\frac{0,1\sqrt{x^2-1}}{x^3}$. 614. а) $\frac{40}{9}$; б) $4,86$; в) $\frac{c^4 \cdot \sqrt{5a}}{b^3}$;
- г) $\frac{m^5 \cdot \sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[4]{p}}$. 617. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $2,5$; г) $1,5$; д) 6 ; е) 36 ; ж) 5 ; з) $2,25$.
618. а) $1,204$; б) $0,756$. 619. а) $3a+2b$; б) $1+b$; в) $2a+b$; г) $1+a+b$.
620. а) $\frac{2(1-2a)}{3(a-2)}$; б) $\frac{6+a}{2(6-a)}$; в) $\frac{(1+2a)(1+b)}{2a(3-2b)}$; г) $\frac{2c+d+6cd+1}{2c(3-2d)}$. 622. а) 36 ;
- б) 8 ; в) 64 ; г) 8 ; д) $\frac{1}{27}$; е) 2 . 623. а) $\frac{3}{4}$; б) $1,5$; в) $\frac{1}{2}$; г) -3 ; д) $\frac{9}{8}$; е) $\frac{4}{3}$; ж) $\frac{1}{2}$;
- з) 0 ; и) $\frac{1}{3}$. 624. а) $\frac{1}{3}$; б) 5 ; в) $\sqrt{2}-1$; г) -11 ; д) $\sqrt{3}-1$; е) 2 ; ж) $\sqrt{2}+1$;
- з) -3 . 625. е) $x = \frac{a^2}{b^3}$; ж) $x = m^3n^4$; з) $x = \sqrt[4]{a^3b^3}$; и) $x^2 = \frac{1}{6-x^2}$; к) $x = \frac{a^2c^4}{b^3}$;
- л) $x = \frac{1}{ab^2c^3}$; м) $x = \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{b^3}$. 626. а) 8 ; б) $\frac{1}{9}$; в) $\sin 2\alpha$; г) 1 ; д) 8 ; $\frac{1}{4}$;
- е) $\frac{1}{27}$; $\sqrt[3]{9}$; ж) 27 ; з) 144 ; $24\sqrt{3}$. 627. а) 64 ; б) 2 ; в) 9 ; г) $\sqrt[7]{a^3}$; д) 16 ; $0,5$;
- е) $\frac{1}{4}$; $\sqrt{2}$; ж) $\frac{1}{27}$; $\sqrt{3}$; з) 27 ; 9 . 630. $y = 4x - 7$; $6\frac{1}{8}$. 631. $y = -x^2 + 2x - 3$; 2 .
632. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$. 633. $4x + y = 0$. 634. $y = 2(2 \pm \sqrt{3})x$. 637. 21 ; 28 ; 35 .
638. 65 см. 639. 78 см, 120 см, 125 см. 640. 25 см. 648. а) $(1; +\infty)$;
- б) $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$; в) $(-1; +\infty)$; г) $(-2; 2)$; д) $(-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$;
- е) $(-1; 0,5)$. 653. а) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$; б) $(-5; -3) \cup (3; +\infty)$; в) $(1; +\infty)$;
- г) $(-1; 6)$; д) $(4; +\infty)$; е) $(3; +\infty)$. 654. а) $(2\pi k; (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$; б) $(-\infty; +\infty)$;
- в) $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$; г) $(-\infty; 0)$. 660. а) $(3; +\infty)$; б) $[\frac{1}{8}; +\infty)$; в) $(0; 4)$;
- г) $(0,5; +\infty)$; д) $(0; 9)$; е) $(0; 0,16)$. 661. а) 2 ; б) $3,5$; в) $\frac{2}{3}$; г) 8 ; д) 46 ; е) $-\frac{8}{5}$.

666. а) $(1; +\infty)$; б) $(0; 1)$. 668. $\arcsin 0,75$. 669. $\frac{\pi c^2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2} \cos^2 \alpha}$.
670. $\frac{R^2 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha \cos^2 \varphi} \sqrt{\cos(\alpha + \varphi) \cos(\alpha - \varphi)}$. 671. $r\sqrt{3}$. 672. а) $\frac{1500\pi\sqrt{13}}{13} \text{ см}^3$;
- б) $1250\pi \text{ см}^3$. 673. 192 см^2 . 674. 1800 см^3 . 675. а) $1824\pi \text{ см}^3$; б) $512\pi \text{ см}^3$;
- в) $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24}$. 683. в) 2,5; г) 3; д) $-\frac{1}{3}$; е) 2; 5; ж) 1; з) 3. 684. а) $(0,75; +\infty)$;
- б) $(-\infty; 1,5)$; в) $(-\infty; -\frac{1}{3}]$; г) $(-\infty; -\frac{2}{3}]$; д) $[4; +\infty)$; е) $(2; +\infty)$; ж) $(-4; 3)$;
- з) $(3; +\infty)$. 685. а) $-0,5$; б) -3 ; 0,5; в) $\frac{1}{3}$; г) -3 ; 1; д) 4; е) 6. 686. а) $(-\infty; 8]$;
- б) $(-\infty; 0,4)$; в) $(-\infty; 0,8)$; г) $[9; +\infty)$; д) $(-1; +\infty)$; е) $(-\infty; -3,5] \cup [3,5; +\infty)$;
- ж) $(-\infty; 0]$; з) $(0; +\infty)$; и) $(-\infty; 0]$. 687. а) -1 ; б) $-1,5$; 0,5; в) 3; г) 0,5.
688. а) $[0; +\infty)$; б) $[0; +\infty)$; в) $(-\infty; 2]$; г) $(-\infty; -0,5]$; д) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$;
- е) $[-2; +\infty)$. 689. а) 1; б) 1; в) 3; г) 2. 690. 4. 691. а) 1; б) -3 ; в) 2; г) 4.
692. а) $(1; +\infty)$; б) $(-\infty; 1)$; в) $[4,5; +\infty)$; г) $(-\infty; 1]$. 693. а) 0; 1; б) 0; 1;
- в) 0; 2; г) 1. 694. а) $(-2; -1)$; б) $(0; +\infty)$; в) $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$; г) $[-0,5; +\infty)$;
- д) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; е) $(-\infty; -1)$. 695. а) 2; 3; б) 0; 1; 2; 3; в) -3 ; -2 ; -1 ;
- 0; 1; г) -3 ; -2 . 696. а) $[-6; 3]$; б) $(5; 30]$; в) $(-\infty; -1)$; г) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$;
- д) $(-2; 1)$; е) $(-\frac{4}{3}; 2)$. 697. а) 0; 2; б) -1 ; в) 0; 2; г) 1. 698. а) $(-\infty; +\infty)$;
- б) $(-\infty; -1]$; в) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$; г) $(-\infty; 0]$. 699. а) 3; б) 0,6; $-1 \pm \sqrt{2}$;
- в) 0; $\frac{2}{3}$; г) $-\frac{1}{3}$; 4. 700. а) $(0; +\infty)$; б) $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [0; \sqrt{2}]$; в) $[3; 4]$; г) $[2; +\infty)$.
704. а) $(1; 1)$; б) $(0; -2)$, $(-1; -3)$; в) $(2; -1)$; г) $(-\frac{1}{3}; \frac{11}{3})$; д) $(3; 1)$;
- е) $(-1; \frac{2}{3})$. 705. а) $(2; 1)$; б) $(1; 1)$; в) $(3; 2)$; г) $(3; -2)$; д) $(1,5; 0,5)$; е) $(0; 1)$.
706. а) $(1; 1)$; б) $(0; 2)$; в) $\frac{5}{3}$; г) 3,5; д) $(7; 3)$; е) $(1,5; 2)$; ж) $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$; з) $(2; 5)$.
707. а) $\pm \log_{12}(1 + \sqrt{1-b})$, если $b \leq 0$; $\pm \log_{12}(1 \pm \sqrt{1-b})$, если $b \in (0; 1]$; нет корней, если $b > 1$; б) нет корней, если $c = 0$; $\{\log_2 c; 2 \log_2 c\}$, если $c > 0$;
- в) нет корней, если $a \leq -1$; $\log_2(a+1)$, если $a \in (-1; 0]$; $\log_2(a+1)$, $\log_2 a$, если $a > 1$; г) $(\log_a 2; 0) \cup (-\log_a 2; +\infty)$, если $0 < a < 1$; $(-\infty; -\log_a 2) \cup (0; \log_a 2)$, если $a > 1$. 709. а) 2; б) 1; в) 3; г) 3; д) -1 ; е) 0. 711. а) 2;
- б) -2 ; 0; в) 1; 2; г) $-0,5$; 1; д) 0; 1; е) -2 ; 3. 712. а) 0,25; б) 14; в) 2; г) 4;
- д) -2 ; е) 0,4. 713. а) $(1; +\infty)$; б) $[2,6; 4)$; в) $(-\infty; 0,5] \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$; г) $(-3; 1]$;
- д) $(-\infty; -2] \cup [5; 5\frac{9}{13})$; е) $(-\infty; -1)$. 714. а) $(-\infty; 2\sqrt{5}-4)$; б) $[-2\frac{1}{6}; -2] \cup [2; 3]$;
- в) $(3; 5)$; г) $(-\frac{5}{3}; 0)$. 715. $\frac{9a^2}{32}$. 716. 252 см^2 , 180 см^3 . 717. а) $\frac{\pi a^3 \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{216}$;

- б) $\frac{\pi a^3 \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{54}$. **718.** $24\pi\sqrt{10}$ дм²; $4\pi(5+8\sqrt{10})$ дм². **726.** а) ± 1 ; б) ± 8 ; в) 1; г) 16; д) 5; е) 3. **727.** 2, 10, 50 или 50, 10, 2. **728.** а) 8; б) 1; в) 9; г) 3; 5; д) $\pm 2\sqrt{5}$; е) 3. **729.** а) (7; 34); б) $(-\infty; -19\frac{1}{3}]$; в) $(-1; -\frac{8}{9}]$; г) (7; 16); д) $[-\frac{1}{3}; \frac{4}{3})$; е) $(-\infty; -0,05)$; ж) (70; $+\infty$); з) (20; $+\infty$); и) [6; $+\infty$); к) $(\frac{5}{3}; 3)$; л) (5; $4+3\sqrt{2}$); м) (2; 3) $\cup$ (11; 12). **730.** а) (6; $+\infty$); б) (2; 3]; в) $(\sqrt{3}; 2)$; г) (1; $\sqrt{2}$); д) (5,5; 7]; е) нет решений. **731.** а) -9; 3; б) -8; 4; в) 100; г) 9. **732.** а) $(0; \frac{1}{9}) \cup (9; +\infty)$; б) $(0; \frac{1}{27}] \cup [27; +\infty)$; в) (2; 32); г) $(\frac{1}{\sqrt[3]{10}}; 10)$. **733.** а) $(\frac{1}{4}; 1) \cup (2; +\infty)$; б) (0; 1] $\cup$ [3; 9]; в) $(0; \frac{1}{9}) \cup (1; 27)$; г) (1; $\sqrt{2}$) $\cup$ [4; $+\infty$); д) (1; $4\sqrt{3}$); е) $(0; \frac{2}{7}] \cup (1; +\infty)$. **734.** а) $-\log_2 5$; б) $\frac{1}{5}$; в) -4; г) 4; 8. **735.** е) $[\frac{\sqrt{13}-3}{2}; +\infty)$; з) $(\sqrt{10}; +\infty)$. **736.** а) $\sqrt{3}$; б) 27; в) $\frac{1}{4}$; 4; г) $\frac{1}{27}$; 27; д) 2; 5; е) -1. **737.** а) 8; б) 0,1; в) 4,5; г) нет корней; д) 5; е) 4; 6. **738.** а) $\sqrt{10}-1$; 9; б) 0,1; 10^5 ; в) -8; -3; г) -5; 3; д) 2; 3; е) 10; ж) $\sqrt{2}$; 4; з) 2; 2^{-7} . **739.** а) 3; б) $\log_2(\sqrt{2}-1)$; в) -2; г) 2; д) 0; 3; е) 2; ж) (0; 1]; з) [2; 4]. **740.** а) $(-\sqrt{2}; 0) \cup (0; \sqrt{2})$; б) $(-\infty; \frac{-3}{2\sqrt{2}}) \cup (\frac{3}{2\sqrt{2}}; +\infty)$; в) (100; $+\infty$); г) (0; 0,1) $\cup$ $(10^{2-\sqrt{3}}; 10^{2+\sqrt{3}}) \cup (10^5; +\infty)$; д) (0; $5^{-1,5}$); е) (3; $+\infty$); ж) нет решений; з) $(-\infty; \log_3 2 - 1) \cup (\log_3 2; +\infty)$; и) (2; $+\infty$); к) $(-\infty; \frac{\sqrt{6}-1}{2}) \cup (1,2; 1,25)$. **741.** а) [0,25; 8]; б) (0; 0,001) $\cup$ (10; $+\infty$); в) $(4\pi k; \frac{\pi}{3} + 4\pi k) \cup (\frac{5\pi}{3} + 4\pi k; 2\pi + 4\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$; г) $(-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. **742.** а) -4; б) $2 - \sqrt{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{3} - 1$; 8; г) 2; д) -1,8; 23; е) 3. **743.** а) $(0; \frac{1}{32\sqrt{2}}) \cup (1; 8)$; б) (0; 1) $\cup$ $\{\sqrt{3}\}$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; 0] \cup [\log_6 5; 1)$; д) $(0; \frac{1}{3}) \cup [1; 9)$; е) $(-\infty; -8) \cup (1; +\infty)$. **746.** а) 3; $\sqrt{2}$; б) $\frac{4}{3}$; 2; в) -2,6; -1; 3; г) 1; 2. **747.** а) (0; 1) $\cup$ [2; $+\infty$); б) (-1; 0) $\cup$ [1; $+\infty$); в) $(-\infty; -9] \cup [9; 15)$; г) $[-\log_3 2; 0)$. **748.** а) (1000; 10); б) (1; 9); в) $(10^6; 0,1)$; г) (8; 0,25). **749.** а) (2; 5), (5; 2); б) (32; 2), (2; 32); в) (9; 7), (7; 9); г) (1; 1). **750.** а) (1; 2); (16; -28); б) (4,5; 0,5); в) (2; 6); г) (9; 6). **751.** а) $\sqrt{10}$; б) 0,01; 10; в) $\frac{1}{9}$; 3; г) 0,01; 100; д) 10; 0,1; е) 0,01; 10. **752.** $a > 0$; $a \neq \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$, $a \neq 1$. **753.** $(-\frac{5}{3}; -1) \cup (2; +\infty)$. **754.** а) (-4; -3) $\cup$ (3; 5); б) (2; 2,5). **755.** $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. **756.** а) (-3; 1); б) $(-\infty; -7] \cup [7; +\infty)$;

- в) $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$; г) никакие; д) $(-\infty; -2)$.
757. $(1-a; 2+2a-a^2)$, если $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$; $(a; 3-a^2)$, если $a \in (2; 3) \cup (3; +\infty)$; нет решений, если $[-1; 2] \cup \{-2; 3\}$. **760.** а) 3; б) 1; в) 8; г) 1; д) 4; е) 0. **761.** а) (4; 1); б) (13; 12); в) (0,5; 0,5); г) (1; 2). **762.** а) $(3; +\infty)$; б) $[4; +\infty)$; в) $[0,5; +\infty)$; г) $\left[\frac{20}{9}; 4\right) \cup (5; +\infty)$; д) $(9; +\infty)$; е) $(-\sqrt{3}; 0)$; ж) нет решений;
 з) $\left[2,5; \frac{7+\sqrt{297}}{4}\right)$. **764.** 54 см². **765.** 7,28 см. **766.** 54 дм²; $21\sqrt{3}$ дм³.
767. а) $-\frac{2b^3 \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2}}{3 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}$; б) $\frac{1}{3}$ м³. **769.** $r\sqrt{3}$; $\frac{2\pi r^3}{8}$.

Раздел V

- 779.** а) 160π см; б) 24π см. **780.** а) 180π см²; б) $3\sqrt{3}$ см. **781.** а) 1 см, 225 см; б) 2 см, 128 см. **782.** а) 18 см; б) 24 см. **784.** б) $20\sqrt{10}$ см.
786. а) 4 см; б) 3 см. **787.** 8 см. **788.** 12 см. **789.** а) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\pi R^2 \sqrt{3}}{2}$; $\frac{\pi R^3}{8}$.
790. а) $3\pi\sqrt{3}$ см; б) $5\pi\sqrt{2}$ м. **791.** 0,6 R. **794.** $4\pi(r_1^2 + r_2^2)$. **795.** $2\pi R \sin \varphi$.
796. 216π см². **797.** 10 см. **798.** 40π дм. **799.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **801.** а) 144π см²; б) 16π дм²; в) 8π м²; г) 48π см². **803.** а) 36 м²; б) 900π см². **804.** а) 9 см; б) 10 м. **805.** а) $4R \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \varphi}$; $2R \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \varphi}$; б) $\frac{16}{9} \pi R^2 \sin^2 \varphi (3 - 4 \sin^2 \varphi)$.
806. $\frac{240}{13} \pi$ см. **807.** а) $\approx 127,5$ млн км²; б) ≈ 36 724 км; в) ≈ 15 930 км; г) ≈ 23 567 км. **808.** ≈ 1420 см². **809.** а) ≈ 44 км; б) ≈ 63 км; в) ≈ 83 км.
810. а) 983 км; б) 985 км; в) 952 км; г) 1025 км. **811.** а) $2\pi r \sin \frac{\alpha}{2}$; б) $r\left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)$. **812.** $r\left(\cos \frac{\alpha}{2} \pm \cos \frac{\beta}{2}\right)$. **813.** а) 1820π см²; б) 240π м² или 660π м².
814. 13 см. **815.** а) $\pi r^2(2 - \sqrt{2})$; б) $\pi r^2(2 - \sqrt{3})$; в) $4\pi h^2$. **816.** а) 1; б) -1; 6; в) 4; г) 0; д) 2; е) 1. **817.** а) $(4; +\infty)$; б) $(-1; +\infty)$; в) $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; г) 0; д) $(-\infty; 3)$; е) $(1; +\infty)$; ж) $(0; 4)$; з) $(-4; 0)$; и) $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.
818. а) 2; б) 0; 1; в) 1; г) 0; д) -2; е) 2; ж) 0; з) 2. **819.** а) 0,1; 10^4 ; б) 3; в) 3; г) 4; д) -4; е) 2. **820.** а) $(2; 6]$; б) $(-\infty; 4)$; в) $(-0,5; 1,5)$; г) $(-\infty; -1)$; д) $(1; 10]$; е) $(-3; 2)$; ж) $(1,2; 1,25)$; з) нет решений. **821.** а) $(4; 5]$; б) $(5; 6]$; в) $(0; 1)$; г) $(4; +\infty)$; д) $(10; +\infty)$; е) $(-4; -3)$. **822.** а) Нет корней; б) $\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; в) $(1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $\arctg(-3) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
823. а) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$; д) πk , $k \in \mathbb{Z}$;

- $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ е) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}.$ 824. а) $\pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$
 б) $\frac{(2n+1)\pi}{5}, n \in \mathbb{Z}; \frac{2\pi(3k+1)}{15}, k \in \mathbb{Z};$ в) $\frac{\pi(8k+1)}{72}, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi(8n+1)}{32}, n \in \mathbb{Z};$
 г) $\frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}; \frac{(6n+1)\pi}{18}, n \in \mathbb{Z};$ д) $\frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$ е) $\frac{5\pi}{48} + \frac{1}{8} \arccos \frac{3}{5} + \frac{\pi n}{4},$
 $n \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{36} - \frac{1}{6} \arccos \frac{3}{5} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}.$ 825. 35 см и 48 см, 21 см и 64 см или
 24 см и 70 см, 32 см и 42 см. 838. а) $256\pi \text{ см}^2; \frac{2048\pi}{3} \text{ см}^3;$ б) 3 см; 113,04 см²;
 в) 4 см; $\frac{256\pi}{3} \text{ см}^3.$ 839. На $\approx 0,43$ см повысится. 841. а) Нет; б) будет.
 844. 1000. 845. а) $3\sqrt[3]{10}$ см; б) $\frac{10}{\sqrt[3]{2}}$ см. 846. 18 см. 847. Шар; конус.
 848. $\frac{V}{\pi R^2} - \frac{2R}{3}.$ 849. а) 5 : 27; б) $45\pi \text{ см}^3, 243\pi \text{ см}^3.$ 850. $\approx 23,6 \text{ м}^3.$ 851. а) $2904\pi \text{ см}^3;$
 б) $\frac{\pi r^3}{8}.$ 852. 5 : 16. 853. 152 604 мм³. 854. $\approx 821 \text{ см}^3.$ 855. $3528\pi \text{ см}^3.$
 856. а) $\frac{\pi R^3}{3}(2 - \sqrt{3});$ б) $\frac{2\pi r^3 \sqrt{3}}{3}.$ 857. $\frac{\pi r^3}{3}; \frac{2\pi r^3}{3}; \frac{\pi r^3}{3}.$
 858. а) $\frac{2\pi r^3}{3}\left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right);$ б) $\frac{2\pi h^3}{3\left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}.$ 859. $8r^3.$ 860. 10,5 см.
 861. $16r^3.$ 863. $\frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$ 864. 8 см. 865. $0,4r\sqrt{5}.$ 866. $8R^3 \sin^2 \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}.$
 867. $0,2R\sqrt{10}.$ 868. 15 552 см³. 869. $\frac{\pi l^3}{6 \cos^3 \frac{\alpha}{2}}.$ 870. $2\sqrt{2}:1.$ 871. а) $\frac{\pi b^3 \sqrt{3}}{54};$
 б) $\frac{4\pi a^3 \cos^3 \delta \operatorname{tg}^3 \frac{\delta}{2}}{3}.$ 872. а) $R \operatorname{ctg} \frac{\pi - \alpha}{4}.$ 873. $\frac{2\pi r(l-r)}{l}.$ 874. $2R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; 2R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2};$
 $\frac{2R}{\sin \alpha}.$ 875. а) $\frac{l}{2 \sin \alpha};$ б) $l \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$ 877. $\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$ 878. а) $\frac{a}{4} \sqrt{\frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}};$
 $\frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}};$ б) $\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{5a}{4\sqrt{3}}.$ 879. 1536 см³.
 880. а) $\frac{4\pi\sqrt{3}a^3}{3} \left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a\sqrt{3} + \sqrt{4b^2 - a^2}} \right)^3;$ б) $\frac{\pi a^3}{6} \sin^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \frac{\beta}{2}.$ 881. а) $\frac{a\sqrt{3 \cos^2 \alpha + 1}}{2 \sin \alpha};$
 б) $13(13 - 3\sqrt{17}) \text{ см}.$ 882. $\frac{128}{9} \text{ см}^3.$ 883. а) $\frac{4\pi a^3 b^3}{3(2a^2 - b^2)\sqrt{2a^2 - b^2}};$ б) $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{432}.$
 884. $\frac{3R^3}{32} \sin \alpha (1 - \cos \alpha).$ 886. а) $\frac{4\pi}{\sin^2 2\alpha} \text{ см}^2; \frac{4\pi}{3 \sin^3 2\alpha} \text{ см}^3;$ б) $\frac{100\pi}{\sin^2 2\beta} \text{ см}^2;$
 $\frac{500\pi}{3 \sin^3 2\beta} \text{ см}^3.$ 887. а) 10 дм; б) $\frac{2a\sqrt{3}}{3 \cos \alpha};$ в) 13 см. 888. $\frac{a\sqrt{6}}{6}.$
 889. $\frac{a\sqrt{2} \sin \alpha}{\cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha + \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}}.$ 894. $\frac{4\pi R^3}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{4} (1 - \cos^2 \frac{\alpha}{4}).$
 895. $3V \cos^2 \frac{\alpha}{4}.$ 896. 46 %. 897. 20 %. 898. 30 %. 899. 25 %. 900. 29.

901. 20 г. 902. От 40 % до $43\frac{1}{3}\%$. 903. 12 ч 15 мин, 14 ч. 904. 20 км/ч.
 905. На 50 %. 906. За 6 ч. 907. 2; 2; 1. 908. 8. 921. а) $\frac{a}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
 923. а) $\frac{a\sqrt{6}}{12}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; в) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; г) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 924. а) $24R^2$; б) $12R^2\sqrt{3}$; в) $24R^2\sqrt{3}$.
 928. $a^2\sqrt{2}$; $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. 929. $\sqrt{3}:1$. 930. 90° . 931. а) $\arccos \frac{1}{3}$; б) $2\arccos \frac{1}{3}$.
 932. а) $\frac{q^2\sqrt{3}}{9}$; б) $\frac{q^2\sqrt{2}}{9}$. 934. а) $l = \frac{h\sqrt{6}}{2}$; б) $k = \frac{1}{3}l$. 935. а) $a\sqrt{2}$; б) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$;
 в) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. 940. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$; $\frac{2a}{3}$; $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. 941. $\frac{h\sqrt{2}}{2}$. 943. а) -9; б) 3; в) -9; г) -15.
 944. а) 9; б) 2; в) 6; г) 4. 945. а) -1; б) -2; в) -3; г) -2. 946. а) 4; б) 5,5; в) 4;
 г) 5. 947. а) 260; б) 136. 948. 7. 949. $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$. 950. $11\frac{253}{256}$.

Раздел VI

960. а) 13; б) 14; в) 13; г) 9; д) 13; е) 14. 961. а) 4 и 1 945 944; б) 43 и
 147 533; в) 2 и 67 320; г) 51 и 7140. 962. а) 841; б) 301; в) 29. 963. 6237.
 965. 5 и 105; 15 и 35. 967. $13k + 9$, $k \in \mathbb{Z}$. 968. а) 0,(342); б) 0,23(571428);
 в) 0,0(051282); г) 0,(104643). 969. а) $\frac{4}{11}$; б) $\frac{18}{55}$; в) $2\frac{13}{27}$; г) $3\frac{1}{70}$; д) $\frac{4}{33}$;
 е) $29\frac{5}{33}$. 973. а) 126; б) 41 625; в) 6. 974. а) 120; б) 0,16; в) $235\frac{2}{3}$; г) 0,1;
 д) 0,82; е) 64,4. 975. а) 3,1; б) 300; в) $10\frac{10}{99}$; г) $\frac{5}{28}$; д) 3,3; е) 2. 976. а) 70;
 б) 8; в) $5\frac{2}{15}$; г) 0,32. 977. а) 2; б) 10 и 48; в) 0,6; 25,2 и 49; в) 2,5; 37,5
 и 52,5; д) 32,4; 81 и 291,6. 978. а) 2,5; б) -7; в) $1\frac{2}{5}$; г) 1. 979. а) $\frac{\sqrt{2}}{15}$;
 б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{280}$; г) 0,5. 980. а) 0,45; б) $\sqrt{2}$; в) 9; г) 2; д) $\frac{12}{17}$; е) 18. 984. а) -3,2;
 б) 3; в) $2\frac{91}{108}$; г) -66. 985. а) 1,5; б) 0,125; в) -4,5; г) 5,5; д) -0,5; е) 1; ж) 43;
 з) $\frac{1}{3}$. 986. а) -0,25; б) 0; в) $-\frac{1}{3}$; г) -1. 987. а) 10 см; 17 см; б) $\frac{11}{14}$; 0,5;
 в) 0,8; 0,6; 0,75; г) $\frac{8}{17}$, $\frac{15}{17}$, $\frac{8}{15}$ или $\frac{8}{\sqrt{793}}$; $\frac{27}{\sqrt{793}}$; $\frac{8}{27}$. 988. а) $\frac{7\pi}{12}$; б) $\frac{5\pi}{12}$;
 в) 3; г) $\frac{13\pi}{12}$; д) $\frac{7\pi}{12}$; е) 0,5. 989. а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{3\pi}{14}$; г) $\frac{\pi}{2}$. 991. а) 37; 35; б) 185;
 175; в) 385; 231; г) 1417; 1183; д) $193\frac{2}{3}$; 60; е) $2248\frac{1}{3}$; 1292. 992. а) 34;
 б) -60; в) 308; г) -780; д) 177; е) $1412\frac{1}{3}$. 993. $r^2(3+2\sqrt{3})$. 994. $\frac{4}{9}S$.
 995. $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. 997. $0,5\sqrt{m^2-4S}$. 998. $\frac{\sqrt{19}-2}{5}r$. 999. $S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1S_2}$.
 1000. $\frac{a^2}{4}(6\sqrt{3}-6-\pi)$. 1001. 1 : 2. 1002. 25 : 18. 1003. $\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$.
 1010. а) $-3xy-5y^2$; б) $a^2+3ab+b^2$; в) $m^2+mn+6m-2n$; г) $2u^2-26uv+u+7v$;
 д) $6k^2+4kl-14l^2$; е) $8i^2+9ij-10j^2$. 1012. а) $(a-b)(a-c)(b-c)$; б) $(x+y)(y+z)(z-x)$;

- в) $(t-a)(t+a)(t^2+at+a^2)$; г) $(b-r)(r-s)(b-s)(b+r+s)$. **1013.** а) 4; б) -3; в) 0,5; г) 2; д) 5; е) 3; ж) 0; з) 1; и) -2; к) 5. **1014.** а) $\frac{3a^2+1}{4(a^2-1)^2}$; б) $\frac{2b^2}{(b^2-1)^2}$; в) $\frac{x+y}{y(x-y)}$; г) $\frac{(m-n)^2}{m^2+mn+n^2}$. **1015.** $\frac{x^2}{2b^2}$; б) $\frac{h}{z}$; в) $-m^2$; г) k^2 ; д) $\frac{1}{t}$; е) $\frac{1}{y^2}$. **1016.** а) -8,5; б) $-\frac{5}{88}$; в) $\frac{9}{29}$; г) -26. **1017.** а) $4-p$; б) $6+s-2\sqrt{6s}$; в) $x^4-18x^3+81x^2$; г) $22\sqrt{yz}-9y-9z$. **1018.** а) 0,5; б) 1; в) 25; г) -0,5. **1019.** а) 1; б) -3; в) 0,5; г) 2; д) 1; е) 1,5. **1020.** а) $0,5+m$; б) $\frac{m+1}{m+n}$; в) $\frac{2+m}{1+2m}$; г) $1-\frac{2m}{3}$. **1021.** а) $2b+2a-2$; б) $2a+0,5$. **1022.** а) $x = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^3}$; б) $x = \frac{\sqrt[3]{a-b}}{\sqrt{a+b}}$; в) $x = \cos^2 \alpha$; г) $x = \frac{1}{(m^2-n^2)^2(m-n)}$; д) $x = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{b^3}}$; е) $x = \sqrt[4]{m^3 \sqrt[3]{n^4}}$; ж) $x = \frac{10\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a-b}}$; з) $x = \frac{1}{100b^2\sqrt{a}}$. **1023.** а) $-\frac{481}{1390}$; б) $1\frac{17}{41}$; в) $1\frac{14}{17}$; г) $\frac{191}{863}$. **1026.** а) 1,5; б) 0,125; в) $0,75\sin 8x$; г) $\operatorname{tg} 6x$. **1027.** а) -2; б) 0,5; в) 1; г) 0,5; д) $\frac{1}{4}$; е) 5; ж) -1; з) $\frac{1}{12}$. **1028.** а) $\frac{\sin y}{\sin x}$; б) $\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}}$; в) $\sin^2 2x$; г) 1. **1029.** а) $\operatorname{ctg} 2x$; б) 1; в) 0; г) 0. **1030.** а) 1; б) $\sqrt{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\sqrt{2}$. **1031.** а) 2; б) 1; в) 0; г) 1. **1032.** а) 0,6; б) $\frac{\sqrt{2}}{10}$; в) $\frac{5}{13}$; г) $\frac{1}{4}$. **1033.** а) $3\frac{3}{7}$; б) -0,8; в) $-\frac{119}{169}$; г) $1\frac{9}{14}$. **1035.** а) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$; б) $-\frac{44}{125}$; в) $-3\frac{3}{7}$; г) $\frac{47}{52}$; д) $1-2x^2$; е) $2x\sqrt{1-x^2}$. **1036.** а) $\arccos \frac{\sqrt{5}}{3}$; б) $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$; в) $\pi - \arccos \frac{3}{\sqrt{10}}$; г) $\arccos \frac{5}{13}$; д) $-\arccos 0,8$; е) $-\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$. **1037.** а) $\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3}$; б) $\arcsin \frac{4}{\sqrt{17}}$; в) $\pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{17}}$; г) $\arcsin \frac{5}{13}$; д) $\pi - \arcsin 0,6$; е) $-\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}$. **1038.** а) $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$; б) $\pi - \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$; в) $\pi - \operatorname{arctg} 0,25$; г) $\operatorname{arctg} 4$; д) $-\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$; е) $\operatorname{arctg} \frac{5}{\sqrt{119}}$. **1039.** а) $\arcsin \frac{56}{65}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\operatorname{arctg} \frac{9}{85}$; г) $\frac{3\pi}{4}$; д) $\frac{\pi}{2}$; е) $\frac{3\pi}{4}$. **1051.** а) 4; б) -2,89; в) $-3\frac{1}{9}$; г) $2\frac{1}{17}$. **1052.** а) $(3\frac{2}{9}; +\infty)$; б) $(-0,2; +\infty)$; в) $[14,375; +\infty)$; г) $(-\infty; 2]$. **1053.** а) 3; б) 4; в) -7; г) $\frac{5}{13}$. **1054.** 3,5. **1055.** а) -8; б) 8. **1056.** а) -4; б) -2,5; в) 0; г) 9. **1057.** а) (6; -2); б) (5; 1); в) (2; 3); г) (125; -47). **1058.** а) (1,2; 0,7); б) (6; 8); в) (5; 9); г) $(\frac{1}{5}; \frac{1}{3})$. **1059.** а) 0; б) ни при каких; в) -4; г) -3; 2. **1060.** а) 3; б) -3; в) 0; г) 1. **1061.** д) 2; 0,5; е) ± 3 ; ж) -1; 3; з) -4; 0. **1062.** а) 0; 1; б) ± 1 ; в) 4; 12; г) -1,5. **1063.** а) 2; б) -3; -1; в) 1; г) 5; д) 0; 2; 3; е) -1; 2; 3; ж) ± 1 ; 3; з) ± 1 . **1064.** а) 1; 2; б) ± 1 ; 3; в) -2,5; -2; 0,5; г) -1; 0,2; д) 0; е) 0; $-\sqrt[3]{2,5}$;

ж) $1; \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$; з) $-1; \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$; и) $-1; 4; 0,25$; к) $-4; 1$. **1065.** а) $-\frac{1}{3}$; б) $4\frac{4}{9}$; в) $1\frac{1}{9}$; г) $4\frac{8}{27}$. **1066.** ± 5 . **1067.** а) (3; 4); (4; 3); б) (2; 3); (3; 2); в) (1; -1); (4; -10); г) (2; 4); (-2; -4); (4; 2); (-4; -2); д) (2; 3); (3; 2); (1; 5); (5; 1); е) (6; 8); (8; 6); (-6; -8); (-8; -6); ж) (3; 2); (-3; -2); з) (1; 3); (3; 1). **1068.** а) (1; 2); б) (2; 2); (3; 3); $\left(\frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}; \frac{1 \mp \sqrt{21}}{2}\right)$; в) (3; 1); (-3; -1); г) (1; 4); (4; 1). **1069.** а) 4; б) 4; в) нет корней; г) 8; д) 3; е) 6; 9; ж) 1; з) 2. **1070.** а) 5; б) -3; в) -3; 2; г) 16; д) -10; 25; е) 2; 3; ж) 1; з) 0,25; и) 21; 86; к) 1; л) 1; м) 1,25. **1071.** а) (16; 1); (1; 16); б) (8; 1); (1; 8); в) (4; 1); (1; 4); г) $\left(1\frac{2}{3}; 3\frac{2}{3}\right)$. **1072.** а) Нет корней; б) 1; 3; в) нет корней; г) нет корней; д) -1; е) $-3\frac{1}{3}$; 2; ж) $(-\infty; 3]$; з) 2; и) 1; -5; к) -3; 2; л) 1; $-3\frac{2}{3}$; м) 1; 3. **1073.** а) 1; б) 1; в) 2; г) 0. **1074.** а) 3; б) -1; 2; в) $\log_7 5$; 0; г) 2; д) ± 1 ; е) 1; ж) 0,5; з) 4; $4 - \log_3 5$; и) 0; к) -1; 0. **1075.** а) $(0; +\infty)$; б) $(4; +\infty)$; в) $(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$; г) $(-\infty; 0,4)$; д) $(-\infty; 0)$; е) $(-\infty; 1,5)$; ж) $(-\infty; \frac{2}{9})$; з) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **1076.** а) 1; б) 2; в) 2; г) 5; д) нет корней; е) нет корней. **1077.** а) $(-\infty; 2,5)$; б) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; в) $(-3; -2) \cup (-2; +\infty)$; г) $(-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$. **1078.** а) Нет решений; б) $(7; +\infty)$; в) $\left(1\frac{1}{3}; 5\right]$; г) нет решений; д) $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$; е) $(-\infty; -0,5) \cup (3; +\infty)$; ж) $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$; з) $(-1; 1) \cup (3; 5)$; и) $(-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$; к) $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$; л) $(-4; -2) \cup (0; 2)$; м) $[-2; -1) \cup (6; 7]$. **1079.** а) 3; 9; б) 10; в) 3^{-4} ; 9; г) 1; 0,1; 10; д) 1; 0,25; е) 8; ж) $\frac{1}{9}$; 1; 3; з) $1 + \sqrt{2}$. **1080.** а) $(10; +\infty)$; б) $(0; 100)$; в) $(0; 0,5)$; г) $(0; 0,25)$; д) $(-\infty; -99)$; е) $(-\sqrt{10}; 0) \cup (0; \sqrt{10})$; ж) $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right) \cup (1; 9]$; з) $(1,5; 5,5)$; и) $(-1; +\infty)$. **1081.** а) (3; 5); б) $(0,25; 4)$; в) нет решений; г) $(0; +\infty)$; д) $(2; 3) \cup (6; +\infty)$; е) $\left[\frac{1}{3}; 1\right)$; ж) $\left(0; \frac{1}{9}\right]$; з) $(1; 10]$. **1082.** а) (1; 2); б) (4; 1); в) нет решений; г) (1; 2); (2; 1); д) $(0,1; 100)$; $(100; 0,1)$; е) (2; 4); $(16; 1)$. **1083.** а) $\frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}(2k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{2}(2k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$; г) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; д) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; е) πk , $k \in \mathbb{Z}$; $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$; ж) $\frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$; з) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **1084.** а) $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; πn , $n \in \mathbb{Z}$; в) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{7}(2n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$; г) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; д) $\frac{3\pi}{20} + \frac{2n\pi}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; е) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; πn , $n \in \mathbb{Z}$; ж) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; з) $\pm \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **1085.** а) $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{3}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) πm , $m \in \mathbb{Z}$; $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} k$, $k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{2}(4k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{18}(4n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$; г) $\pm \arccos 0,8 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

д) $\frac{\pi}{12}(6k \pm 1)$, $k \in \mathbb{Z}$; е) $\frac{1}{2} \operatorname{arccotg} \frac{3}{4} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$; ж) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 (-1)^k $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; з) $-25^\circ + 90^\circ k$, $k \in \mathbb{Z}$; и) $\pm \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
 к) $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-9 + \sqrt{73}}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **1086.** а) $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right]$, $k \in \mathbb{Z}$;

б) $\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \right)$, $k \in \mathbb{Z}$; в) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{11\pi}{6} + 2\pi k \right)$, $k \in \mathbb{Z}$;

г) $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right]$, $k \in \mathbb{Z}$; д) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k \right)$, $k \in \mathbb{Z}$;

е) $\left(\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right)$, $k \in \mathbb{Z}$; ж) $\left(\frac{\pi}{3} + \pi k; \pi + \pi k \right)$, $k \in \mathbb{Z}$; з) $\left(\pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k \right)$, $k \in \mathbb{Z}$;

и) $\left[2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \pi + 2\pi k \right]$, $k \in \mathbb{Z}$;

к) $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right) \cup \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right]$, $k \in \mathbb{Z}$; л) $\left[\pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k \right)$, $k \in \mathbb{Z}$;

м) $\left[\frac{3\pi}{4} + \pi k; \frac{5\pi}{6} + \pi k \right]$, $k \in \mathbb{Z}$. **1087.** 40 мин, 2 ч.

1088. $3 + 2\sqrt{2}$. **1089.** 12 мин. **1090.** На $\frac{1}{6}$ уменьшится. **1091.** 90 с.

1092. $\frac{1}{3}$ км/мин. **1097.** а) 6; б) 49; в) 48,5; г) 5,5. **1098.** а) $\frac{38}{\sqrt{41}}$;

б) $\frac{31}{\sqrt{202}}$; в) $\frac{140}{\sqrt{233}}$; г) $\frac{7}{\sqrt{37}}$. **1101.** а) $\left[\frac{1}{3}; +\infty \right)$; б) $[-2; 0]$; в) $(-\infty; -2) \cup (1,5; 1,75]$;

г) $(-6; -2) \cup (6; +\infty)$; д) $(-\infty; -1) \cup (0; 2)$; е) $(2; 3) \cup (3; 4)$. **1102.** а) $x \neq -\frac{\pi}{4}$

и $x \neq \frac{\pi(4 + \pi + 2\pi k)}{4(1 - \pi - 2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $t \neq -2$ и $t \neq \frac{\pi(1 + n) \pm \sqrt{\pi^2(1 + n)^2 + 8\pi n}}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$;

в) $[0,5; +\infty)$; г) $[1,5; +\infty)$; д) $(-6; 1) \cup (1,5; +\infty)$; е) $\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

1103. а) $[-0,3; 0,3]$; б) $[-0,5; 0,5]$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; -13] \cup [-1; +\infty)$;

д) $(-4; +\infty)$; е) $(-2; +\infty)$. **1104.** а) $[-9; 3]$; б) $[1,5; 4,5]$; в) $[0; 4]$;

г) $[0; 3]$; д) $(-\infty; -2]$; е) $(-\infty; -2]$. **1105.** а) $[0,6; 1]$; б) $[0,5; 1]$;

в) $[0,6; 1]$. **1107.** а) 4 и 4; б) 0 и 0; в) 6 и 4; г) 2 и 2. **1108.** а) 1 и 1;

б) 0 и 0. **1119.** а) $y = 3x + 9$; б) $y = 0,2(x + 21)$; в) $2x + 7y = 11$. **1120.** а) $(5; -13)$;

б) $(3; -11)$; в) $(11; -11)$. **1121.** $8x + 12y + 5 = 0$. **1122.** а) $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 49$;

б) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$; в) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$; г) $x^2 + y^2 = 25$;

д) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$. **1123.** а) $-\frac{3}{4}(x - 2)^2 + 3$; б) $0,5x^2 + 2x + 1$;

в) $3(x + 1)^2 - 1$; г) $2(x - 1)^2 - 3$. **1124.** $y = 0$; $y = -4x$. **1126.** $y = -4x \pm 8,5$.

1129. а) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$; б) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$. **1130.** а) $y = x^2$;

б) $y = (x + 3)^2 + 4$; в) $y = (x - 1)^2 - 1$. **1131.** $y = \frac{1}{x + 3} + 2$. **1140.** а) $y = -2(x - 2) + 1$; б) $y = 1,5(x - 1) + 5$; в) $y = (4 - 2\sqrt{6})(x - 1) - 3$. **1141.** а) $\frac{8}{\sqrt{10}}$;

б) $\frac{10\sqrt{5} \pm 1}{3}$. **1142.** а) $(0; 4,75)$; б) $(1,5; -1)$. **1143.** $F\left(\frac{1}{3}; 1\frac{2}{3}\right)$. **1144.** $\left(0; 3\frac{13}{17}\right)$;

$\left(5\frac{9}{14}; 10\frac{9}{14}\right)$. **1145.** $y = -20x - 55$ и $y = -13x - 20$; $y = 8x - 13$ и $y = x + 1$.

1146. а) 4; б) 12. 1149. а) -2 ; 1; б) ± 3 ; в) $\pm \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{89}} \right) + \arccos \frac{8}{\sqrt{89}} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; г) $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; $\pm \arccos \left(\pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right) + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$; д) $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; е) 2.
1150. а) 25; -2 ; б) 17; -47 ; в) $1\frac{2}{3}$; -9 ; г) 0; -256 ; д) 8; 0; е) $\pm \frac{1}{3}$; ж) экстремумов нет; з) $\frac{\sqrt{30}}{4}$; и) ± 1 ; к) экстремумов нет. 1151. а) 54; -135 ; б) $\pm 2\frac{2}{3}$; в) 9; 0; г) 1; $-\frac{5}{6}$; д) 45; -4 ; е) 3; -6 ; ж) $2\frac{1}{8}$; 1; з) $\frac{1}{3}$; -1 . 1152. а) Наибольшего значения нет; 1; б) 10; 6; в) $3\sqrt{2}$; 2; г) наибольшего и наименьшего значений нет; д) 29; 20; е) $1\frac{1}{8}$; 0; ж) 22; $-0,5$; з) 80; -18 ; и) 105; $-\frac{11}{27}$. 1153. а) $-\log_2 15$; б) $\frac{1}{6}$; в) 2. 1155. а) 0; б) 0; в) 0,5. 1156. а) $[-3; -2] \cup [2; 3]$; б) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; в) ± 2 ; ± 4 ; г) ± 2 ; ± 3 . 1157. а) -1 ; $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$; б) -1 ; в) 1; $2 \pm \sqrt{3}$; г) $-2 \pm \sqrt{3}$; $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$. 1158. а) -2 ; 3; б) 3; 4; в) -1 ; 2; г) 1; -4 . 1163. а) $x + y = 0$; б) $x - 2y + 7 = 0$. 1172. а) (0; 0); б) (4; -6); в) $\left(\frac{6}{\sqrt{13}}; -\frac{9}{\sqrt{13}} \right)$; $\left(-\frac{6}{\sqrt{13}}; \frac{9}{\sqrt{13}} \right)$; г) $\left(\frac{2}{3}(1 + 3\sqrt{3}); -1 - 3\sqrt{3} \right)$; $\left(\frac{2}{3}(1 - 3\sqrt{3}); -1 + 3\sqrt{3} \right)$. 1175. $(2x_2 - x_1; y_1)$, $(x_2; 2y_1 - y_2)$. 1177. а) (6; 3), (9; 4), (12; 5), (15; 6); б) $(-2; 1)$; в) (0; -35). 1178. (6,2; $-3,6$) и (5; 1) или $\left(\frac{15 + 4\sqrt{53}}{5}; \frac{3\sqrt{53} - 30}{5} \right)$ и $\left(\frac{8 + 3\sqrt{53}}{\sqrt{53}}; \frac{28 - 6\sqrt{53}}{\sqrt{53}} \right)$. 1179. а) (7,5; 2,75); б) (9,2; 5,2); в) $\left(\frac{a^2}{2(a+b)}; \frac{b^2}{2(a+b)} \right)$. 1180. $\left(3\frac{1}{9}; 1\frac{7}{9} \right)$. 1181. а) $\operatorname{arctg} \frac{1}{8}$; б) $\operatorname{arctg} 1,75$. 1182. $\operatorname{arctg} 7$. 1183. а) 4; б) 7,6; в) 7,8; г) 1,6. 1184. а) $(x - 1)(y - 1) = 0$; б) $(3x + 3y - 14)(x - y - 9) = 0$; в) $(x + y)(x - y - 2) = 0$; г) $(x + y - 5)(x - y - 5) = 0$. 1185. а) 6; 13 $\frac{13}{24}$; б) 16; 32,5. 1186. а) 10; $5\sqrt{5}$; 5; б) $\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$; 90° ; $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$; в) 25; г) $\frac{\sqrt{407}}{2}$; (5,5; 3); $2,5\sqrt{5}$; (1,5; 6); $5\sqrt{2}$; (0; 6); д) 10; (4; 1); $2\sqrt{5}$; (4,8; 5,4); 5; (4; 1); е) $\frac{10\sqrt{2}}{3}$; $\left(3\frac{1}{3}; 5\frac{2}{3} \right)$; $2,5\sqrt{2\sqrt{5} - 2}$; $\left(5 - 3\sqrt{5}; \frac{1 + 9\sqrt{5}}{4} \right)$; $10\sqrt{10\sqrt{10} - 4\sqrt{5}}$; $(-8 + 6\sqrt{5}; -15 + 8\sqrt{5})$; ж) $\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}; \frac{23 - 7\sqrt{5}}{2} \right)$; $2,5(3 - \sqrt{5})$; (1,5; 6); $2,5\sqrt{5}$. 1187. $\sqrt{a^2 + a} + \sqrt{a^2 - a}$. 1188. $(-\infty; -4) \cup (2; 4)$. 1194. а) $\frac{\sqrt{15}}{2} - 1$; б) 1; в) 2,4; г) 0,1. 1195. $-\frac{400}{219}$. 1196. а) В 1,44 раза; б) на 10 %. 1197. 120 см^2 . 1198. а) 4; б) 6. 1202. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 1203. 7. 1204. а) 7 или 8; б) 5; в) $4\sqrt{6}$. 1205. а) 18,6; б) $6(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$.

1206. $\sqrt{2} : 1$. 1207. а) $\frac{10}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{m}{2 \sin(\alpha + \beta)}$; в) $\frac{2ab}{h}$. 1208. $\frac{a^2}{2h}$; $\frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$;
 $\frac{4h^2 + b^2}{8h}$. 1209. а) $\frac{5\sqrt{13}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{130}}{3}$; в) $1,3\sqrt{61}$; г) $\frac{a\sqrt{15}}{6}$. 1210. а) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}$;
 в) $2 - \sqrt{3}$. 1212. 120° . 1213. а) $a + b$ или $|a - b|$; б) $\frac{|a - b|}{2}$ или $\frac{a + b}{2}$.
 1214. а) $\frac{\alpha + \beta}{2}$; б) $\frac{\alpha + 2\beta + \gamma}{2}$. 1227. а) $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$; б) $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$; в) $\frac{\alpha}{2}$.
 1228. а) $\gamma - \beta$; б) $\gamma - \beta$. 1229. а) $\frac{|\alpha - \beta|}{2}$; б) $|90^\circ - 2\alpha|$. 1231. а) $180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$
 или $\frac{\alpha + \beta}{2}$; б) $\frac{\alpha + 2\beta + \gamma}{2} - 180^\circ$; в) $|\alpha + \beta - 180^\circ|$. 1233. а) $\frac{|a - b|}{2}$; б) $\frac{a + b}{2}$
 или $\frac{|a - b|}{2}$; в) $a + b$. 1238. 6. 1240. $|\alpha - \beta|$. 1241. $180^\circ - 2\alpha$, $180^\circ - 2\beta$,
 $2(\alpha + \beta) - 180^\circ$. 1251. 18; 24. 1254. а) $\frac{an}{m + n}$; б) $\frac{an + bm}{m + n}$. 1270. а) $\sqrt{d^2 - (R - r)^2}$;
 б) $\sqrt{d^2 - (R + r)^2}$. 1271. $2\sqrt{Rr}$. 1272. $\frac{Rr}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}$. 1273. $\frac{2}{3}r$.
 1274. $\frac{Rr(R + r)}{R^2 + Rr + r^2}$. 1275. а) $\frac{r}{3}$; б) $\frac{r}{2}(3\sqrt{3} - 5)(2\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3})$.
 1276. г) $((h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1})(h_a^{-1} + h_b^{-1} - h_c^{-1})(h_a^{-1} - h_b^{-1} + h_c^{-1})(-h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1}))^{-0,5}$;
 ж) $l_a = \sqrt{bc\left(1 - \left(\frac{a}{b + c}\right)^2\right)}$. 1279. а) $r_a = \frac{S}{p - a}$, где S — площадь, а p — по-
 лупериметр треугольника; б) $p - a$, где p — полупериметр; в) p , где
 p — полупериметр. 1280. $\frac{a + b - c}{2}$, $\frac{a - b + c}{2}$, $\frac{-a + b + c}{2}$, $\frac{a + b + c}{2}$.
 1283. $\frac{kl}{h}$, $\frac{h^2 - kl}{h}$. 1284. а) $\frac{a|b^2 + c^2 - a^2|}{4S}$, где S — площадь треугольника;
 б) $\frac{c|a^2 + b^2 - c^2|}{8S}$, где S — площадь треугольника; в) $\sqrt{\frac{p - a}{p}}bc$, где p —
 полупериметр; г) $\sqrt{\frac{pbc}{p - a}}$, где p — полупериметр; д) $\frac{a}{p}\sqrt{\frac{pbc}{p - a}}$, где p —
 полупериметр. 1285. а) $2(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)$; б) $4\sqrt{m^2n^2 - S^2}$.
 1286. $0,5\sqrt{(2mn + a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(2mn - a^2 + b^2 - c^2 + d^2)}$.
 1287. а) $\sqrt{ab + \frac{ac^2 - bd^2}{a - b}}$; $\sqrt{ab + \frac{ad^2 - bc^2}{a - b}}$;
 б) $\frac{1}{4} \cdot \frac{a + b}{a - b} \sqrt{(a - b + c + d)(a - b + c - d)(a - b - c + d)(-a + b + c + d)}$.
 1289. $0,25\sqrt{(2kl + a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(2kl - a^2 + b^2 - c^2 + d^2)}$.
 1290. а) $\sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}$; $\sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}$;
 б) $\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$, где p — полупериметр.

1292. $m\sqrt{1-\left(\frac{n}{2R}\right)^2} \pm n\sqrt{1-\left(\frac{m}{2R}\right)^2}$. 1294. а) $R(2\sqrt{3}-3)$; б) $R(\sqrt{2}-1)$.
1296. а) $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $\frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; б) $\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$, $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $\frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, $\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$, $2R$. 1297. $2,5a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$. 1298. а) $\frac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{2}$; б) $\frac{1}{4}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15})$. 1301. а) 8; б) 10; в) 12; г) 15; д) 7; е) 22.
1302. а) 10; б) 15; в) 25; г) 54. 1304. а) $2r(2-\sqrt{2})$, $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$; б) $2r(2-\sqrt{3})$, $\frac{R}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)$; в) $2r(\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}-1)$, $R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.
1305. 25. 1306. а) 1,5; б) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$. 1307. а) 25; б) $[-3; -2] \cup (-2; 1]$. 1308. -2 и 0. 1309. $\frac{1}{\cos^2 x}$. 1310. 40 км/ч. 1311. -4. 1312. 9. 1313. Ромб.
1314. $13,5\sqrt{3}$. 1315. 12. 1316. 11. 1317. 648. 1318. -0,16. 1319. а) 10; б) -2; в) 14; г) 15; д) -24; е) 78; ж) 2. 1320. 24 г. 1321. 5. 1322. 3. 1323. -2. 1324. а) 3; б) 1. 1325. а) 0; б) -57. 1332. 10 см, 24 см. 1333. а) 3 см, 6 см, 7 см; б) 9 см, 12 см, 15 см. 1334. 1:3. 1335. 4 м², 64 м² или 34 м² и 34 м². 1336. $2\sqrt{3}$ см, $4\sqrt{3}$ см, $6\sqrt{3}$ см. 1337. $\sqrt{\frac{(m^2+n^2)S}{2mn}}$. 1338. а) 5 см или $\sqrt{97}$ см; б) 9 м или 21 м. 1339. а) 14 см²; б) 42 см², 12 см², 30 см². 1340. 1 см. 1341. 8 см, 26 см, 30 см. 1342. а) 18 см²; б) 10,5 см² или 14 см² или $\frac{5}{4}(5+\sqrt{73})$ см²; в) 270 см²; г) 756 см²; д) 72 см². 1343. 4 см. 1344. 12 см; 27 см. 1346. 4 см. 1347. 546 см²; $\sqrt{1621}$ см или 126 см²; $\sqrt{181}$ см. 1348. а) 8316 см²; б) 150 см² или 42 см²; в) 156 см². 1349. 3 см. 1350. а) 8 см, 12 см или 2 см, 6 см; б) 8 см или 11,25 см. 1351. 8 см.
1352. $4\sqrt{\frac{m}{m+n}}$ см. 1353. $2(a^2+b^2+ab)$. 1354. $in:jn:(i+j)m+(m+n)k$. 1355. $\frac{n-1}{n}S$. 1356. $1:(\sqrt{2}-1):(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. 1357. $\frac{m^2+n^2+4mn}{(2m+n)^2}Q$. 1358. $m^2:mn:n^2:mn$. 1359. $\frac{k+l}{2(k+l+1)}$. 1362. $\frac{1}{6}$. 1363. $\frac{1}{6}:\frac{1}{2}:\frac{1}{6}:\frac{1}{6}$.
1366. а) 24; б) $\sqrt{\frac{m+n+2l}{2} \cdot \frac{m+n-2l}{2} \cdot \frac{m-n+2l}{2} \cdot \frac{-m+n+2l}{2}}$. 1369. 8 м², 10 м², 15 м², 12 м². 1370. $4,8+1,2\sqrt{31}$. 1374. $1:\sqrt{2}-1$. 1375. $\frac{1}{mn+1}$. 1376. $\frac{1}{6}$. 1377. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$. 1378. $2\sqrt{SQ}$. 1381. $2\pi R^2(18\sqrt{3}-31)$. 1382. 50 см, 72 см. 1383. 37 см. 1385. 18,5 см. 1386. а) 7,5 см; б) $40\frac{1}{12}$ см. 1387. 13 см. 1388. а) 18 см, 24 см, 30 см; б) $8\sqrt{3}$ см, $12\sqrt{2}$ см, $4(3+\sqrt{3})$ см. 1389. 12 см. 1390. 35 см. 1391. 84 см. 1392. 4:25. 1393. 4 см; $2(5+\sqrt{5})$ см.

1394. $1:3$. 1395. $S_{\text{ш}} = \frac{6}{7} S_{\text{ц}}$. 1397. $259,2\pi \text{ см}^2$. 1398. $\frac{R}{3}$. 1399. $\frac{500\pi}{3} \text{ см}^3$.
1400. а) $\frac{\pi a^3 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{24 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}$; б) $\frac{\pi a^3}{24} \sin^2 \varphi \operatorname{tg} \theta$. 1401. $3:4$. 1403. $\frac{4(2 + \sqrt{10} + \sqrt{17})}{15\pi}$.
1404. а) $\frac{29\sqrt{3} + 18\sqrt{73}}{4} \text{ см}^2$; б) $58 + 7\sqrt{81} \text{ см}^2$; в) $1,5(29\sqrt{3} + 7\sqrt{91}) \text{ см}^2$.
1405. а) $2r^3 \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$; б) $\frac{h^3 \sqrt{2(\cos \beta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}$.
1406. $8r^3 \sin^3 \alpha \cos \alpha$. 1407. $\frac{8r^3 \sqrt{3}}{\sin \alpha}$. 1408. $6r^3 \sqrt{3}$. 1409. $\frac{r^3 \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{4}$.
1410. $l^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha \sin 2\beta$. 1412. а) 410 м^3 ; б) $6,1$. 1413. 216 . 1416. $r^2 h \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$.
1417. $1:2$. 1418. $0,6\pi r^2$. 1419. $\frac{8\pi}{3} (2 - \sqrt{3}) \text{ м}^3$. 1420. а) $3500\pi \text{ см}^2$; б) 0 ; в) $588\pi \text{ см}^2$; г) $\frac{\pi R^2}{4}$. 1422. а) $\pi r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$; б) $36\pi (1 + \sqrt{2}) \text{ см}^2$; в) $\approx 208 \text{ см}^2$. 1423. $36\sqrt{15} \text{ см}^2$. 1424. а) $4\sqrt{3} \text{ см}$; б) 17 см ; в) $\frac{H}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{3} \operatorname{ctg}^2 \alpha}$; г) $\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$; д) $\frac{a}{2 \sin 2\alpha \sin \frac{180^\circ}{n}}$; е) 8 см ; ж) $\sqrt{6} \text{ см}$. 1425. а) $\frac{\pi a^3}{4}$; б) $1,5\pi a^3 \sqrt{3}$; в) $\frac{\pi R^3}{\sqrt{2}}$; г) $\pi R^3 \cos \alpha \sin 2\alpha$. 1426. а) πS ; б) $2\pi R^2 \sin 2\alpha$.
1427. а) $\frac{\pi D^3}{6}$; б) 972 см^3 ; в) $504\pi \sqrt{14} \text{ см}^3$. 1429. $\approx 2,5 \text{ т}$. 1431. б) 167 .
1432. а) $\approx 340 \text{ г}$; б) $\approx 29 \text{ кг}$. 1433. $\approx 5,9 \text{ дм}^3$. 1434. $\approx 422 \text{ г}$. 1435. $936\pi \text{ см}^2$.
1436. $\frac{\pi a^3}{12} \left(2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1 \right)$. 1437. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 1438. 5 см ; 4 см . 1439. $\pi(3r^2 - d^2)$.
1440. $\frac{R \pm \sqrt{R^2 - 2m}}{2}$; $\frac{\pi R^2}{2}$. 1442. $\frac{7}{250}$. 1443. а) $3744\pi \text{ см}^3$; б) $\frac{125000\pi}{3} \text{ см}^3$.
1444. а) $\frac{419\pi R^3}{1296}$; б) $\frac{38\pi R^3}{375}$ или $\frac{68\pi R^3}{375}$. 1445. $\frac{117\pi}{8}$. 1446. $6,56 \text{ м}$.
1447. а) $\frac{\pi r^3}{3}$; б) $2943,5 \text{ см}^3$; в) $\approx 1\,635\,417 \text{ см}^3$. 1450. $\frac{100\pi}{3} \text{ см}^3$; $\frac{400\pi}{3} \text{ см}^3$.
1451. а) $36\pi \text{ см}^2$; б) $194\pi \text{ см}^2$; в) $34\pi \text{ см}^2$; г) $4\pi r^2 (17 - 12\sqrt{2})$; д) $32\pi \text{ см}^2$;
- е) $16\pi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$; ж) $\frac{\pi a^2}{3}$; з) $\frac{\pi b^2}{\sin^2 \alpha}$; и) $\frac{\pi l^3}{3}$. 1452. πd^2 ; $1,5 \pi d^2$. 1453. а) $\frac{25\pi}{3} \text{ см}^2$;
- б) $\frac{8\pi a^2}{3}$; в) $150\pi \text{ см}^2$; г) $\frac{\pi a^2}{\sin^2 \alpha}$. 1454. а) $18\sqrt{\frac{3}{23}} \text{ см}$; б) $\frac{175}{4} \text{ см}$;
- в) $a\sqrt{1,5}$. 1455. а) $\sqrt{3} \text{ см}$; б) $\frac{ah}{a + \sqrt{a^2 + 12h^2}}$; в) $\frac{a}{1 + \sqrt{13}}$; г) $\frac{a \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3}}}{2(1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2})}$.
1456. 15 см^2 . 1457. а) 896 см^3 ; б) $\frac{3\sqrt{3}H}{8} (4R^2 - H^2)$; в) $\frac{8R^3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sqrt{(2 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^3}}$.

1458. а) $2R^3 \sin \alpha \cdot \sqrt{3(4 \cos^2 \alpha - 3)}$; б) $2R^3 \sqrt{3} \cdot \sin \alpha \cos^2 \alpha$. 1459. а) $12r^2 \sqrt{3}$;
 б) $18r^2 \sqrt{3}$. 1460. а) 4 м; б) 60° . 1461. а) 3 : 4; б) 3 : 2; в) 4 : 1; г) $\frac{1}{2} \left(\frac{r}{r_1} + \frac{r_1}{r} + 1 \right)$.
1463. а) $480,2 \text{ см}^3$; б) $\frac{4}{3} r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha$; в) 16 см^3 . 1464. а) $\frac{3V\sqrt{3}}{4\pi} \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha$;
 б) $\frac{8\sqrt{3}R^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)^2}{27}$; в) $2R^3 \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha$; г) $\frac{8\sqrt{3}r^3 \sin^2 2\alpha (1 + \cos 2\alpha)}{(5 + 3 \cos 2\alpha)^3}$;
- д) $\frac{r^2 H^2 \sqrt{3}}{H - 2r}$. 1465. а) $2\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}$; б) $2\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{2}}$; в) $2\sqrt{R^2 - a^2}$.
1466. а) $2\sqrt{6} \text{ см}$; б) $\frac{5a\sqrt{3}}{6}$. 1467. а) $\frac{\alpha \sqrt{\cos \alpha}}{2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)}$; б) $\frac{3(\sqrt{5} - 1)}{4} \text{ см}$;
 в) $8\sqrt{3} - 12 \text{ см}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ см}$; д) $\frac{9}{8}(\sqrt{41} - 3) \text{ см}$. 1468. а) $\frac{2a}{3}$; б) $\frac{a \sin 2\alpha \sin \beta}{2(\cos \beta + 1)}$;
 в) $\frac{5}{\sin 2\delta}$; г) $\frac{a}{6}(3 - \sqrt{3})$; д) $\frac{a}{\sin 2\beta}$; е) $\frac{h}{1 + \sqrt{1 + 4 \left(\frac{h}{a} \right)^2}}$. 1469. а) 120 см^2 ;
 б) 1536 см^2 ; в) $4R^2 \sin 2\alpha$; г) $\frac{16r^2}{\sin^2 \alpha}$. 1470. а) 2 см; б) 3 см; в) $\frac{l}{6}$.
1471. $\frac{a\sqrt{33}(3\sqrt{5} - 1)}{132}$; $\frac{4a\sqrt{33}}{11}$. 1472. $8\sqrt{3} \text{ см}$, 12 см или $8\sqrt{2} \text{ см}$, 16 см.
1473. а) $\frac{b}{2 \sin \alpha}$; б) $\frac{l^2}{2h}$. 1474. $2r \sin \alpha$. 1475. а) $\frac{h}{3}$; б) $h \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.
1476. $\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha}{4} + 45^\circ \right)$. 1477. а) $\frac{h^2 + r^2}{2r}$. 1480. а) $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{54} \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$.
1481. а) $\approx 70\,711,49 \text{ см}^3$; б) $\frac{\pi a^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}}{18\sqrt{3}}$. 1482. $a \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$.
1483. а) $9000\sqrt{3} \text{ см}^3$; б) $\frac{H^2 \sqrt{3}(2R - H)}{4}$. 1484. а) $6000\sqrt{3} \text{ см}^3$;
 б) $\frac{H^2 \sqrt{3}(2R - H)}{2}$. 1485. а) $3\pi r^3$; б) $\frac{8\pi r^3}{3}$; в) $\frac{\pi r^3}{3} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2}$. 1488. $2592\pi \text{ дм}^3$.
1489. 32 см^2 . 1490. $3 + \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}$; $\frac{3}{4} \sqrt{\frac{7 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$. 1491. а) -2941; б) 46; в) 9.
1492. 15. 1493. а) -150; б) 0,3; в) 6. 1494. $x; y; z$. 1495. $\log_{ab} x$. 1496. а) 3;
 б) 5; в) 11. 1497. а) 3; б) $0 < |a| < 2$. 1498. 3а 1 ч 12 мин. 1499. 1,2 см.
1500. а) 7; б) 20; в) 0; г) 1. 1501. -3. 1502. 2. 1503. 6. 1534. $\frac{pq}{p + q}$. 1536. 12.
1538. 5 или 7. 1560. а) $1 - 2\sqrt{7}$; б) 3; в) 676; г) 37. 1561. а) 2; б) 2.
1562. а) $x - 4$; б) $x - x^3$. 1563. а) 3 и 4; б) 1; в) 2; г) 2. 1564. 15 км/ч.
1565. $0 < m < 2,25$. 1566. 32,5 см. 1567. а) 2; б) 4; в) 270° ; г) 7; д) 1.
1568. а) -5; б) 5. 1569. а) $\frac{4}{25}$; б) 12 см.

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел I. Призма и цилиндр

1. Призма	4
2. Цилиндр	21

Раздел II. Степень с действительным показателем

3. Корень из числа	37
4. Свойства арифметического корня	48
5. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	58
6. Степень с действительным показателем	68
7. Степенная функция с действительным показателем	80
8. Иррациональные выражения, уравнения и неравенства	96

Раздел III. Пирамида и конус

9. Пирамида	114
10. Конус	131

Раздел IV. Показательные и логарифмические выражения, функции, уравнения, неравенства

11. Показательная функция	148
12. Логарифмические выражения	160
13. Логарифмическая функция	173
14. Показательные уравнения, неравенства и их системы	181
15. Логарифмические уравнения, неравенства и их системы	192

Раздел V. Сфера и шар

16. Сфера	207
17. Шар	221
18. Правильные многогранники	241

Раздел VI. Повторение курса математики

19. Числа и вычисления	254
20. Выражения и их преобразования	268
21. Уравнения и неравенства	284
22. Координаты и функции	299
23. Геометрические фигуры и их свойства	334
24. Геометрические величины	379
25. Геометрические построения	419
Ответы	443

Учебное издание

Латотин Леонид Александрович
Чеботаревский Борис Дмитриевич

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие для 11 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

Зав. редакцией *В. Г. Бехтина*. Редактор *Г. А. Бабаева*. Технические рисунки *А. Л. Латотина*. Художественный редактор *Л. А. Дашкевич*. Технический редактор *И. И. Дроздова*. Компьютерная верстка *Л. И. Шевко*.
Корректоры *Д. Р. Лосик, В. С. Бабеня, А. В. Алешко*.

Подписано в печать 15.01.2013. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Офсетная печать. Усл. печ. л. 29 + 0,25 форз. Уч.-изд. л. 18,74 + 0,26 форз. Тираж 5465 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие
«Народная асвета» Министерства информации Республики Беларусь.
ЛИ № 02330/0494083 от 03.02.2009.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
ЛП № 02330/0150496 от 11.03.2009.
Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск.

Правообладатель Народная асвета

(Название и номер учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состояние учебного пособия при получении	Оценка учащемуся за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			